

☆☆☆

Page - 141 -

d) $d: 2x - 3y + 1 = 0, \quad \Delta: 2x - 3y - 1 = 0.$

II. Các bài toán liên quan đến khoảng cách – góc – phương trình đường phân giác

VD 15. Hãy tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ trong các trường hợp sau:

- a) $M(4; -5)$, $\Delta: 3x - 4y + 8 = 0$. b) $M(3; 5)$, $\Delta: x + y + 1 = 0$.
c) $M(4; -5)$, $\Delta: \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$. d) $M(3; 5)$, $\Delta: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3}$.

VD 16. Cho ΔABC , hãy tính diện tích tam giác ABC trong các trường hợp sau:

- a) $A(-1; -1)$, $B(2; -4)$, $C(4; 3)$. b) $A(-2; 14)$, $B(4; -2)$, $C(5; -4)$.

VD 17. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A và cách B một khoảng bằng h cho trước trong các trường hợp sau:

- a) $A(-1; 2)$, $B(3; 5)$, $h = 3$. b) $A(-1; 3)$, $B(4; 2)$, $h = 5$.
c) $A(5; 1)$, $B(2; -3)$, $h = 5$. d) $A(3; 0)$, $B(0; 4)$, $h = 4$.

VD 18. Viết phương trình đường thẳng d song song và cách đường thẳng Δ một khoảng h trong các trường hợp sau đây:

- a) $\Delta: 2x - y + 3 = 0$, $h = \sqrt{5}$. b) $\Delta: y - 3 = 0$, $h = 5$.
c) $\Delta: x - 2 = 0$, $h = 4$. d) $\Delta: \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + 4t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$, $h = 3$.

VD 19. Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng Δ và cách A một khoảng h , trong các trường hợp sau đây:

- a) $\Delta: 3x - 4y + 12 = 0$, $A(2; 3)$, $h = 2$. b) $\Delta: x + 4y - 2 = 0$, $A(-2; 3)$, $h = 3$.
c) $\Delta: y - 3 = 0$, $A(3; -5)$, $h = 5$. d) $\Delta: x - 2 = 0$, $A(3; 1)$, $h = 4$.

VD 20. Viết phương trình đường thẳng d cách đều hai điểm A, B , trong các trường hợp sau đây:

- a) $M(2; 5)$, $A(-1; 2)$, $B(5; 4)$. b) $M(1; 2)$, $A(2; 3)$, $B(4; -5)$.
c) $M(10; 2)$, $A(3; 0)$, $B(-5; 4)$. d) $M(2; 3)$, $A(3; -1)$, $B(3; 5)$.

VD 21. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm M và cách đều hai điểm A, B , trong các trường hợp sau đây:

- a) $M(2; 5)$, $A(-1; 2)$, $B(5; 4)$. b) $M(1; 2)$, $A(2; 3)$, $B(4; -5)$.
c) $M(10; 2)$, $A(3; 0)$, $B(-5; 4)$. d) $M(2; 3)$, $A(3; -1)$, $B(3; 5)$.

VD 22. Viết phương trình đường thẳng d , biết rằng d cách điểm A một khoảng bằng h , cách B một khoảng bằng k , trong các trường hợp sau:

- a) $A(1; 1)$, $B(2; 3)$, $h = 2$, $k = 4$. b) $A(2; 5)$, $B(-1; 2)$, $h = 1$, $k = 3$.

VD 23. Tính góc giữa các đường thẳng sau:

- a) $d_1: x - 2y - 1 = 0$, $d_2: x + 3y - 11 = 0$. b) $d_1: 2x - y + 5 = 0$, $d_2: 3x + y - 6 = 0$.
c) $d_1: 3x - 7y + 26 = 0$, $d_2: 2x + 5y - 13 = 0$. d) $d_1: 3x + 4y - 5 = 0$, $d_2: 4x - 3y + 11 = 0$.

VD 24. Tính số đo các góc trong tam giác ABC trong các trường hợp sau:

- a) $AB: 2x - 3y + 21 = 0$, $BC: 2x + 3y + 9 = 0$, $CA: 3x - 2y - 6 = 0$.
b) $AB: 4x + 3y + 12 = 0$, $BC: 3x - 4y - 24 = 0$, $CA: 3x + 4y - 6 = 0$.
c) $A(-3; -5)$, $B(4; -6)$, $C(3; 1)$. d) $A(1; 2)$, $B(5; 2)$, $C(1; -3)$.

VD 25. Cho hai đường thẳng d và Δ . Tìm m để góc giữa hai đường thẳng đó bằng α trong các trường hợp sau đây:

- a) $d: 2mx + (m-3)y + 4m - 1 = 0$, $\Delta: (m-1)x + (m+2)y + m - 2 = 0$, $\alpha = 45^\circ$.
b) $d: (m+3)x - (m-1)y + m - 3 = 0$, $\Delta: (m-2)x + (m+1)y - m - 1 = 0$, $\alpha = 90^\circ$.

VD 26. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A và tạo với đường thẳng Δ một góc α với:

- a) $A(6;2), \Delta: 3x+2y-6=0, \alpha=45^\circ$.
 b) $A(-2;0), \Delta: x+3y-3=0, \alpha=45^\circ$.
 c) $A(2;5), \Delta: x+3y+6=0, \alpha=60^\circ$.
 d) $A(1;3), \Delta: x-y=0, \alpha=30^\circ$.

VD 27. Viết phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng d_1, d_2 cho trước trong các trường hợp sau đây:

- a) $d_1: 3x-4y+12=0, d_2: 12x+5y-20=0$.
 b) $d_1: 3x-4y-9=0, d_2: 8x-6y+1=0$.
 c) $d_1: x+3y-6=0, d_2: 3x+y+2=0$.
 d) $d_1: x+2y-11=0, d_2: 3x-6y-5=0$.

VD 28. Cho ΔABC , hãy tìm tâm và bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC trong các trường hợp sau:

- a) $AB: 2x-3y+21=0, BC: 2x+3y+9=0, CA: 3x-2y-6=0$.
 b) $AB: 4x+3y+12=0, BC: 3x-4y-24=0, CA: 3x+4y-6=0$.
 c) $A(-3;-5), B(4;-6), C(3;1)$.
 d) $A(1;2), B(5;2), C(1;-3)$.

III. Các bài toán về viết phương trình đường tròn cơ bản

VD 29. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I và đi qua điểm A, trong các trường hợp sau:

- a) $I(2;4), A(-1;3)$.
 b) $I(-3;2), A(1;-1)$.
 c) $I(3;5), A(7;2)$.
 d) $I(0;0), A(4;4)$.
 e) $I(-1;0), A(3;-11)$.
 f) $I(1;2), A(5;2)$.

VD 30. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I và tiếp xúc với đường thẳng Δ cho trước, trong các trường hợp sau đây:

- a) $I(3;4), \Delta: 4x-3y+15=0$.
 b) $I(2;3), \Delta: 5x-12y-7=0$.
 c) $I(-3;2), \Delta \equiv Ox$.
 d) $I(-3;-5), \Delta \equiv Oy$.
 e) $I(-1;2), \Delta: x-2y+7=0$.
 f) $I(0;0), \Delta: y-2x=0$.

VD 31. Viết phương trình đường tròn (C) có đường kính AB, trong các trường hợp sau đây:

- a) $A(-2;3), B(6;5)$.
 b) $A(0;1), C(5;1)$.
 c) $A(-3;4), B(7;2)$.
 d) $A(5;2), B(3;6)$.
 e) $A(1;1), B(7;5)$.
 f) $A(1;5), B(-1;1)$.

VD 32. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua hai điểm A, B và có tâm I nằm trên đường thẳng Δ , trong các trường hợp sau đây:

- a) $A(2;3), B(-1;1), \Delta: x-3y-11=0$.
 b) $A(0;4), B(2;6), \Delta: x-2y+5=0$.
 c) $A(2;2), B(8;6), \Delta: 5x-3y+6=0$.
 d) $A(-1;0), B(1;2), \Delta: x-y-1=0$.
 e) $A(-1;2), B(3;0), \Delta: 7x+y-6=0$.
 f) $A(0;0), B(1;2), \Delta: x-y=0$.

VD 33. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường thẳng Δ , trong các trường hợp sau đây:

- a) $A(1;2), B(3;4), \Delta: 3x+y-3=0$.
 b) $A(6;3), B(3;2), \Delta: x+2y-2=0$.
 c) $A(-1;-2), B(2;1), \Delta: 2x-y+2=0$.
 d) $A(2;0), B(4;2), \Delta \equiv Oy$.

VD 34. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua điểm A, tiếp xúc với đường thẳng Δ tại B, trong các trường hợp sau đây:

- a) $A(-2;6), \Delta: 3x-4y=15, B(1;-3)$.
 b) $A(-2;1), \Delta: 3x-2y=6, B(4;3)$.
 c) $A(6;-2), \Delta \equiv Ox, B(6;0)$.
 d) $A(4;-3), \Delta: x+2y-3=0, B(3;0)$.

VD 35. Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A và tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 , với

- a) $A(2;3), \Delta_1: 3x-4y+1=0, \Delta_2: 4x+3y-7=0$.

- b) $A(1;3)$, $\Delta_1: x+2y+2=0$, $\Delta_2: 2x-y+9=0$.
 c) $A \equiv O(0;0)$, $\Delta_1: x+y-4=0$, $\Delta_2: x+y+4=0$.
 d) $A(3;-6)$, $\Delta_1 \equiv Ox$, $\Delta_2 \equiv Oy$.

VD 36. Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và có tâm nằm trên đường thẳng d , với

- a) $\Delta_1: 3x+2y+3=0$, $\Delta_2: 2x-3y+15=0$, $d: x-y=0$.
 b) $\Delta_1: x+y+4=0$, $\Delta_2: 7x-y+4=0$, $d: 4x+3y-2=0$.
 c) $\Delta_1: 4x-3y-16=0$, $\Delta_2: 3x+4y+3=0$, $d: 2x-y+3=0$.
 d) $\Delta_1: 4x+y-2=0$, $\Delta_2: x+4y+17=0$, $d: x-y+5=0$.

VD 37. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, với

- a) $A(2; 0)$, $B(0;-3)$, $C(5;-3)$.
 b) $A(5; 3)$, $B(6; 2)$, $C(3;-1)$.
 c) $A(1; 2)$, $B(3; 1)$, $C(-3;-1)$.
 d) $A(-1;-7)$, $B(-4;-3)$, $C \equiv O(0; 0)$.

VD 38. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC, với

- a) $A(2; 6)$, $B(-3;-4)$, $C(5; 0)$.
 b) $A(2; 0)$, $B(0;-3)$, $C(5;-3)$.

VD 39. Lập phương trình đường tròn (C) đối xứng với (C') qua đường thẳng d :

- a) $(C'): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$, $d: x-y+1=0$.
 b) $(C'): (x-2)^2 + (y-3)^2 = 3$, $d: x+y-1=0$.
 c) $(C'): x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$, $d: x-2=0$.

IV. Các bài toán liên quan đến Elip cơ bản

VD 40. Cho elip (E) . Xác định độ dài các trục, tiêu cự, tọa độ các tiêu điểm, tọa độ các đỉnh, tâm sai, phương trình các đường chuẩn của (E) , với (E) có phương trình:

- a) $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.
 b) $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.
 c) $(E): 16x^2 + 25y^2 = 400$.
 d) $(E): x^2 + 4y^2 = 1$.
 e) $(E): 9x^2 + 16y^2 = 144$.
 f) $(E): 6x^2 + 9x^2 = 54$.

VD 41. Lập phương trình chính tắc của elip trong các trường hợp sau đây:

- a) Độ dài trục lớn bằng 6, trục nhỏ bằng 4.
 b) Độ dài trục lớn bằng 10, tiêu cự bằng 6.
 c) Một tiêu điểm $F_1(1;0)$ và độ dài trục lớn = 2.
 d) Tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3};0)$ và qua $M(1; \frac{\sqrt{3}}{2})$.
 e) Qua hai điểm: $M(1;0)$, $N(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1)$.
 f) $M(4; -\sqrt{3})$, $N(2\sqrt{2}; 3)$.
 g) Tiêu điểm $F_1(-8;0)$ và tâm sai bằng $\frac{4}{5}$.
 h) Trục nhỏ = 6, đường chuẩn $x\sqrt{7} = \pm 16$.
 i) Đi qua điểm $M(8;12)$ và có bán kính qua tiêu điểm bên trái của M bằng 20.
 j) Đi qua điểm $M(3; 2\sqrt{3})$ và có bán kính qua tiêu điểm bên trái của M bằng $4\sqrt{3}$.
 k) Có phương trình các cạnh hình chữ nhật cơ sở là $x = \pm 9$, $y = \pm 3$.
 l) Đi qua điểm $M(\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}})$ và ΔMF_1F_2 vuông tại M.
 m) Hình chữ nhật cơ sở của (E) có một cạnh nằm trên đường thẳng $d: x-2=0$ và có độ dài đường chéo bằng 6.

- VD 52.** Trong mặt phẳng Oxy , cho ΔABC vuông tại A . Biết rằng đường thẳng BC qua điểm $I\left(2; \frac{1}{2}\right)$ và tọa độ hai đỉnh $A(-1;4)$, $B(1;-4)$. Hãy tìm tọa độ đỉnh C ?
 Đáp số: $C(3;5)$.
- VD 53.** Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $C(2;-5)$ và đường thẳng $d: 3x - 4y + 4 = 0$. Tìm trên đường thẳng d hai điểm A, B đối xứng nhau qua điểm $M\left(2; \frac{5}{2}\right)$ sao cho $S_{\Delta ABC} = 15$?
 Đáp số: $A(0;1)$, $B(4;4)$ hoặc $A(4;4)$ hoặc $B(0;1)$.
- VD 54.** Trong mặt phẳng Oxy , cho bốn điểm $A(1;0)$, $B(-2;4)$, $C(-1;4)$, $D(3;5)$. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng $\Delta: 3x - y - 5 = 0$, sao cho $S_{\Delta MAB} = S_{\Delta MCD}$?
 Đáp số: $M(-9;-32)$ hoặc $M\left(\frac{7}{3}; 2\right)$.
- VD 55.** Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $A(-1;2)$ và đường thẳng $d: x - 2y + 3 = 0$. Tìm trên đường thẳng d hai điểm B, C sao cho ΔABC vuông tại C và $AC = 3BC$.
 Đáp số: $C\left(-\frac{3}{5}; \frac{6}{5}\right)$ và $B\left(-\frac{13}{15}; \frac{16}{15}\right)$ hoặc $B\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$.
- VD 56.** Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $A(2;2)$ và $d_1: x + y - 2 = 0$, $d_2: x + y - 8 = 0$. Tìm tọa độ điểm B, C tương ứng thuộc d_1, d_2 sao ΔABC vuông cân tại A ?
 Đáp số: $B(3;-1)$, $C(5;3)$ hoặc $B(-1;3)$, $C(3;5)$.
- VD 57.** Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(0;-2)$. Tìm tọa độ điểm B thuộc đường thẳng $d: x - y + 2 = 0$ sao cho đường cao AH và đường trung tuyến OM trong ΔOAB có độ dài bằng nhau ?
 Đáp số: $B(-1 \pm \sqrt{3}; 1 \pm \sqrt{3})$.
- VD 58. (B – 2011).** Trong mặt phẳng Oxy , cho hai đường thẳng $d_1: x - y - 4 = 0$ và $d_2: 2x - y - 2 = 0$. Tìm tọa độ điểm $N \in d_2$, sao cho ON cắt đường thẳng d_1 tại điểm M thỏa: $OM.ON = 8$.
 Đáp số: $N(0;-2)$ hoặc $N\left(\frac{6}{5}; \frac{2}{5}\right)$.
- VD 59.** Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $A(2;1)$. Tìm tọa độ điểm B trên trục hoành, tọa độ điểm C trên trục tung, sao cho ΔABC vuông tại A và có diện tích lớn nhất, biết điểm $x_B < 0$.
 Đáp số: $B \equiv O(0;0)$, $C(0;5)$.
- VD 60.** Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $A(-1;3)$ và đường thẳng $d: x - 2y + 2 = 0$. Dựng hình vuông $ABCD$ sao cho hai đỉnh B, C nằm trên đường thẳng d . Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$, biết rằng các tọa độ của C đều dương.
 Đáp số: $B(0;1)$, $C(2;2)$, $D(1;4)$.
- VD 61.** Trong mặt phẳng Oxy , cho ΔABC vuông tại A có $B(1;1)$, $AC: 4x + 3y - 32 = 0$. Trên tia BC lấy điểm M sao cho $MB.BC = 75$. Tìm tọa độ điểm C , biết rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔAMC bằng $\frac{5\sqrt{5}}{2}$.
 Đáp số: $C(2;8)$ hoặc $C(8;0)$.
- VD 62.** Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(1;2)$, $B(4;3)$. Tìm điểm M trên trục hoành để $\widehat{AMB} = 45^\circ$.
 Đáp số: $M(1;0)$ hoặc $M(5;0)$.

VD 63. Tìm trên đường thẳng $d: x - 2y + 3 = 0$ điểm M sao cho $P = x_M^2 + y_M^2$ nhỏ nhất?

Đáp số: $M\left(-\frac{11}{5}; \frac{8}{5}\right)$.

VD 64. Trong mặt phẳng Oxy , hãy tìm điểm M trên trục hoành sao cho khoảng cách từ M đến hai điểm A và B là nhỏ nhất trong các trường hợp sau đây:

a) $A(1;2)$ và $B(3;4)$.

b) $A(1;1)$ và $B(2;-4)$.

Đáp số: a) $M\left(\frac{5}{3}; 0\right)$.

b) $M\left(\frac{6}{5}; 0\right)$.

VD 65. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(1;2)$, $B(0;-1)$ và đường thẳng $d: y = 2x + 1$. Hãy tìm điểm $M \in d$, sao cho:

a) $MA + MB$ nhỏ nhất?

b) $|MA - MB|$ lớn nhất?

Đáp số: a) $M\left(\frac{2}{15}; \frac{19}{15}\right)$.

b) $M(2;5)$.

VD 66. Trong mặt phẳng Oxy , cho $M(2;1)$. Đường thẳng d cắt hai trục tọa độ tại $A(a;0)$, $B(0;b)$, với $a, b > 0$. Hãy viết phương trình đường thẳng d trong các trường hợp sau:

a) $S_{\Delta OAB}$ nhỏ nhất.

b) $OA + OB$ nhỏ nhất.

c) $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

Đáp số: a) $d: x + 2y - 4 = 0$.

b) $d: x + y\sqrt{2} - 2 - \sqrt{2} = 0$.

c) $d: 2x + y - 5 = 0$.

VD 67. Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(1;1)$, $B(2;5)$, $C(4;7)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A sao cho tổng $P = 2.d(B;\Delta) + 3.d(C;\Delta)$ đạt giá trị nhỏ nhất, đạt giá trị lớn nhất?

Đáp số: P_{\min} khi $\Delta: 2x - y - 1 = 0$ và P_{\max} khi $\Delta: 11x + 26y - 37 = 0$.

VD 68. Cho elíp $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ và đường thẳng $d: x - 2y + 12 = 0$. Tìm trên (E) điểm M sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d là lớn nhất, nhỏ nhất.

VD 69. Cho elíp $(E): x^2 + 4y^2 = 25$ và đường thẳng $d: 3x + 4y - 30 = 0$. Tìm trên (E) điểm M sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d là lớn nhất, nhỏ nhất.

VD 70. Cho elíp $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ và đường thẳng $d: x - \sqrt{2}y + 2 = 0$. Đường thẳng d cắt (E) tại hai điểm B, C . Tìm tọa độ điểm A trên (E) sao cho ΔABC có diện tích lớn nhất.

VD 71. Cho elíp $(E): x^2 + 2y^2 = 2$ và đường thẳng $d: 3x - 2y - 3 = 0$. Đường thẳng d cắt (E) tại hai điểm B, C . Tìm tọa độ điểm A trên (E) sao cho ΔABC có diện tích lớn nhất.

VD 72. Cho elíp $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ và đường thẳng $d: 3x + 4y - 12 = 0$. Chứng minh rằng d luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B . Tính độ dài đoạn AB . Tìm tọa độ điểm $C \in (E)$ sao cho:

a) $S_{\Delta ABC} = 6$.

b) $S_{\Delta ABC}$ lớn nhất.

c) ΔABC vuông.

VD 73. Cho elíp $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ và đường thẳng $\Delta: Ax + By + C = 0$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để đường thẳng Δ tiếp xúc với elíp (E) là $a^2 A^2 + b^2 B^2 = C^2$.

VD 74. Cho elíp $(E): 9x^2 + 16y^2 = 144$. Gọi M là điểm di động trên elíp (E) . Chứng minh rằng biểu thức: $P = OM^2 + MF_1 \cdot MF_2$ là một hằng số không đổi.

Bài 2. GIẢI TAM GIÁC

☆☆☆

VD 75. Trong mặt phẳng Oxy , cho ΔABC có phương trình cạnh BC , hai đường cao lần lượt là BB' , CC' . Hãy tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC và trục tâm của tam giác trong các trường hợp sau:

- | | | |
|----------------------------|---------------------------|---------------------------|
| a) $BC : 4x + y - 12 = 0,$ | $BB' : 5x - 4y - 15 = 0,$ | $CC' : 2x + 2y - 9 = 0.$ |
| b) $BC : 5x - 3y + 2 = 0,$ | $BB' : 4x - 3y + 1 = 0,$ | $CC' : 7x + 2y - 22 = 0.$ |
| c) $BC : x - y + 2 = 0,$ | $BB' : 2x - 7y - 6 = 0,$ | $CC' : 7x - 2y - 1 = 0.$ |
| d) $BC : 5x - 3y + 2 = 0,$ | $BB' : 2x - y - 1 = 0,$ | $CC' : x + 3y - 1 = 0.$ |

VD 76. Trong mặt phẳng Oxy , cho ΔABC có tọa độ đỉnh A , hai đường cao xuất phát từ hai đỉnh có phương trình lần lượt là d_1, d_2 . Hãy tìm tọa độ các đỉnh và tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC trong các trường hợp sau:

- | | | |
|--------------|--------------------------|---------------------------|
| a) $A(3;0),$ | $d_1 : 2x + 2y - 9 = 0,$ | $d_2 : 3x - 12y - 1 = 0.$ |
| b) $A(1;0),$ | $d_1 : x - 2y + 1 = 0,$ | $d_2 : 3x + y - 1 = 0.$ |
| c) $A(0;1),$ | $d_1 : 2x - y - 1 = 0,$ | $d_2 : x + 3y - 1 = 0.$ |
| d) $A(2;2),$ | $d_1 : 9x - 3y - 4 = 0,$ | $d_2 : x + y - 2 = 0.$ |

VD 77. Trong mặt phẳng Oxy , cho ΔABC có tọa độ đỉnh A , hai đường trung tuyến xuất phát từ hai đỉnh có phương trình lần lượt là d_1, d_2 . Hãy tìm tọa độ các đỉnh và tâm đường tròn nội tiếp ΔABC trong các trường hợp sau:

- | | | |
|--------------|--------------------------|--------------------|
| a) $A(1;3),$ | $d_1 : x - 2y + 1 = 0,$ | $d_2 : y - 1 = 0.$ |
| b) $A(3;9),$ | $d_1 : 3x - 4y + 9 = 0,$ | $d_2 : y - 6 = 0.$ |

VD 78. Trong mặt phẳng Oxy , cho ΔABC có phương trình cạnh AB , hai đường trung tuyến AM , BN . Hãy tìm tọa độ các đỉnh và tính diện tích ΔABC trong các trường hợp sau:

- | | | |
|---------------------------|-----------------------|-------------------------|
| a) $AB : x - 2y + 7 = 0,$ | $AM : x + y - 5 = 0,$ | $BN : 2x + y - 11 = 0.$ |
| b) $AB : x - y + 1 = 0,$ | $AM : 2x + 3y = 0,$ | $BN : 2x + 6y + 3 = 0.$ |

VD 79. Trong mặt phẳng Oxy , cho ΔABC có phương trình hai cạnh và tọa độ trung điểm của cạnh thứ ba. Hãy tìm tọa độ các đỉnh và tìm tọa độ chân đường phân giác trong góc \widehat{BAC} của ΔABC với các trường hợp sau đây:

- | | | |
|---------------------------|-------------------------|------------|
| a) $AB : 2x + y - 2 = 0,$ | $AC : x + 3y - 3 = 0,$ | $M(-1;1).$ |
| b) $AB : 2x - y - 2 = 0,$ | $AC : x + y + 3 = 0,$ | $M(3;0).$ |
| c) $AB : x - y + 1 = 0,$ | $AC : 2x + y - 1 = 0,$ | $M(2;1).$ |
| d) $AB : x + y - 2 = 0,$ | $AC : 2x + 6y + 3 = 0,$ | $M(-1;1).$ |

VD 80. Trong mặt phẳng Oxy , cho ΔABC có tọa độ đỉnh A , một đường cao và một trung tuyến xuất phát từ hai đỉnh lần lượt có phương trình là d_1, d_2 . Hãy tìm tọa độ các đỉnh và tính số đo các góc trong ΔABC với các trường hợp sau đây:

- | | | |
|---------------|---------------------------|---------------------------|
| a) $A(4;-1),$ | $d_1 : 2x - 3y + 12 = 0,$ | $d_2 : 2x + 3y = 0.$ |
| b) $A(2;-7),$ | $d_1 : 3x + y + 11 = 0,$ | $d_2 : x + 2y + 7 = 0.$ |
| c) $A(0;-2),$ | $d_1 : x - 2y + 1 = 0,$ | $d_2 : 2x - y + 2 = 0.$ |
| d) $A(-1;2),$ | $d_1 : 5x - 2y - 4 = 0,$ | $d_2 : 5x + 7y - 20 = 0.$ |

VD 81. Trong mặt phẳng Oxy , cho ΔABC có tọa độ đỉnh, phương trình đường trung tuyến d_1 và phương trình đường phân giác trong d_2 . Hãy tìm tọa độ các đỉnh và tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC trong các trường hợp sau:

- | | | |
|---------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| a) $A(1;2),$ | $d_1 \equiv BM : 2x + y + 1 = 0,$ | $d_2 \equiv CD : x + y - 1 = 0.$ |
| b) $C(4;-1),$ | $d_1 \equiv AM : 2x + y - 6 = 0,$ | $d_2 \equiv AD : x - y = 0.$ |

- c) $C(4;3)$, $d_1 : 4x + 13y - 10 = 0$, $d_2 : x + 2y - 5 = 0$.
- VD 82.** Cho ΔABC biết tọa độ một đỉnh, tọa độ trọng tâm G , tọa độ trực tâm H . Hãy viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC và tìm các đỉnh còn lại của tam giác trong các trường hợp:
- a) Đỉnh $A(2;3)$, trọng tâm $G\left(4;-\frac{5}{3}\right)$, trực tâm $H\left(2;\frac{12}{7}\right)$.
- b) Đỉnh $A(1;2)$, trọng tâm $G(1;1)$, trực tâm $H\left(\frac{2}{3};\frac{10}{3}\right)$.
- c) Đỉnh $A(-1;2)$, trọng tâm $G(1;1)$, trực tâm $H(0;-3)$.
- VD 83.** Trong mặt phẳng Oxy , cho ΔABC biết tọa độ một đỉnh, một đường cao có phương trình là d_1 , một đường phân giác trong xuất phát từ một đỉnh có phương trình là d_2 . Hãy tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC và tìm tâm đường tròn ngoại tiếp trong các trường hợp sau đây:
- a) $C(-3;-1)$, $d_1 \equiv AH : x + 3y + 12 = 0$, $d_2 \equiv AD : x + 7y + 32 = 0$.
- b) $B(2;-1)$, $d_1 \equiv AH : 3x - 4y + 27 = 0$, $d_2 \equiv CD : x + 2y - 5 = 0$.
- VD 84.** Trong mặt phẳng Oxy , cho ΔABC biết tọa độ một đỉnh, hai đường phân giác trong của hai đỉnh lần lượt có phương trình là d_1, d_2 . Hãy tìm tọa độ các đỉnh ΔABC trong các trường hợp:
- a) $A(2;-1)$, $d_1 \equiv BD : x - 2y + 1 = 0$, $d_2 \equiv CF : x + y + 3 = 0$.
- b) $A\left(\frac{4}{5};\frac{7}{5}\right)$, $d_1 \equiv BD : x - 2y - 1 = 0$, $d_2 \equiv CF : x + 3y - 1 = 0$.
- VD 85.** Trong mặt phẳng Oxy , cho ΔABC biết đường cao, đường trung tuyến, đường phân giác xuất phát từ ba đỉnh lần lượt có phương trình là d_1, d_2, d_3 . Hãy tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC trong các trường hợp sau:
- a) $d_1 \equiv CH : 2x + y + 1 = 0$, $d_2 \equiv BM : x - y + 1 = 0$, $d_3 \equiv AD : x + y - 3 = 0$.
- b) $d_1 \equiv AH : 3x - 4y + 27 = 0$, $d_2 \equiv BM : 4x + 5y - 3 = 0$, $d_3 \equiv CD : x + 2y - 5 = 0$.
- VD 86.** Cho ΔABC biết đường phân giác trong $AD : x + y + 2 = 0$, đường cao $BH : 2x - y + 1 = 0$, điểm $M(1;1)$ nằm trên cạnh AB và diện tích tam giác ΔABC bằng $\frac{27}{4}$. Tìm A, B, C ?
- Đáp số: $A(5;-7), B\left(\frac{1}{2};2\right), C(3;-6)$.
- VD 87.** Trong mặt phẳng Oxy , cho ΔABC vuông tại A , có đỉnh $C(-4;1)$, phân giác trong góc A có phương trình $x + y - 5 = 0$. Viết phương trình các cạnh của ΔABC , biết $S_{\Delta ABC} = 24, (x_A > 0)$.
- Đáp số: $A(4;1), B(4;7)$.
- VD 88.** Trong mặt phẳng Oxy , cho ΔABC có chân đường cao hạ từ đỉnh A là $\left(\frac{17}{5};-\frac{1}{5}\right)$, chân đường phân giác trong của góc A là $D(5;3)$ và trung điểm của cạnh AB là $M(0;1)$. Tìm tọa độ C ?
- Đáp số: $C(9;11)$.
- VD 89.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ΔABC có trung tuyến và phân giác trong kẻ từ đỉnh B có phương trình lần lượt là $d_1 : x + 8y + 15 = 0, d_2 : x - 5y - 11 = 0$. Đường thẳng chứa cạnh AB đi qua điểm $M(-3;-8)$. Xác định tọa độ các điểm A, B, C biết $S_{\Delta ABC} = 13, (x_A > 0)$.
- Đáp số: $A(3;1), B(1;-2), C(7;-6)$.
- VD 90.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ΔABC có đỉnh $A(3;3)$, tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(2;1)$, phương trình đường phân giác trong góc \widehat{BAC} là $x - y = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C biết rằng $BC = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ và góc \widehat{BAC} nhọn.

Đáp số: $B(0;2)$, $C\left(\frac{8}{5};-\frac{6}{5}\right)$ hoặc $B\left(\frac{8}{5};-\frac{6}{5}\right)$, $C(0;2)$.

VD 91. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ΔABC có tọa độ điểm A , tâm đường tròn ngoại tiếp là I , tâm đường tròn nội tiếp là K . Hãy tìm tọa độ B, C trong các trường hợp:

a) $A(2;3)$, $I(6;6)$, $K(4;5)$, ($x_B < x_C$).

b) $A(1;1)$, $I(2;3)$, $K(6;6)$.

Đáp số: a) $B(2;9)$, $C(10;3)$. b) $B\left(\frac{23-7\sqrt{15}}{4};\frac{17+\sqrt{15}}{4}\right)$, $C\left(\frac{23+7\sqrt{15}}{4};\frac{17-\sqrt{15}}{4}\right)$.

VD 92. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ΔABC có chân đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C đến các cạnh đối diện lần lượt là D, E, F . Tìm tọa độ các đỉnh ΔABC trong các trường hợp sau:

a) $D(2;-1)$, $E(2;2)$, $F(-2;2)$.

b) $D(-2;-2)$, $E\left(-\frac{11}{13};\frac{16}{13}\right)$, $F\left(\frac{44}{17};-\frac{6}{17}\right)$.

VD 93. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ΔABC cân tại A , các cạnh BC, AB lần lượt có phương trình là d_1, d_2 và $M \in AC$. Tìm tọa độ đỉnh C trong các trường hợp sau:

a) $d_1 \equiv BC: x-3y-1=0$, $d_2 \equiv AB: x-y-5=0$, $M(-4;1) \in AC$.

b) $d_1 \equiv BC: 3x-y+7=0$, $d_2 \equiv AB: x+2y-5=0$, $M(1;-3) \in AC$.

c) $d_1 \equiv BC: 2x-3y-5=0$, $d_2 \equiv AB: x+y+1=0$, $M(1;1) \in AC$.

VD 94. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ΔABC vuông cân tại A và $BC: x+7y-31=0$. Biết rằng: $N(7;7) \in AC$ và $M(2;-3) \in AB$ mà M nằm ngoài đoạn AB . Tìm tọa độ các đỉnh ΔABC ?

Đáp số: $A(-1;1)$, $B(-4;5)$, $C(3;4)$.

VD 95. Trong mặt phẳng Oxy , cho ΔABC có phương trình đường thẳng chứa đường cao kẻ từ B là $x+3y-18=0$, phương trình đường thẳng trung trực đoạn thẳng BC là $3x+19y-279=0$, đỉnh C thuộc đường thẳng $d: 2x-y+5=0$. Tìm tọa độ đỉnh A biết rằng $\widehat{BAC} = 135^\circ$.

Đáp số: $A(4;8)$.

VD 96. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho ΔABC có $M(2;1)$ là trung điểm cạnh AC , điểm $H(0;-3)$ là chân đường cao kẻ từ A , điểm $E(23;-2)$ thuộc đường thẳng chứa trung tuyến kẻ từ C . Tìm tọa độ điểm B biết $A \in d: 2x+3y-5=0$ và $x_C > 0$.

Đáp số: $B(-3;-4)$.

VD 97. Trong mặt phẳng Oxy , cho ΔABC . Đường cao kẻ từ B có phương trình $2x-y-1=0$, tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là $I(2;-2)$ và điểm $M(-1;2)$ là trung điểm BC . Tìm A ?

Đáp số: $A(7;-7)$.

VD 98. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $d_1: 2x+2y-1=0$, $d_2: 4x-\sqrt{2}y+3=0$. Gọi A là giao điểm của d_1 và d_2 . Viết phương trình đường thẳng đi qua $M(4;-2)$ và lần lượt cắt d_1, d_2 tại B, C sao cho ΔABC cân tại A .

Đáp số: $x-(3+\sqrt{2})y-10-2\sqrt{2}=0$.

VD 99. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $d: x-y=0$ và điểm $M(2;1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt trục hoành tại A và cắt d tại B sao cho ΔAMB vuông cân tại M .

Đáp số: $\Delta: x+y-2=0$ hoặc $\Delta: 3x+y-12=0$.

VD 100. Trong mặt phẳng Oxy , cho ΔABC có $AB=\sqrt{5}$, đỉnh $C(-1;-1)$, đường thẳng chứa cạnh AB có phương trình $x+2y-3=0$. Trọng tâm $G \in d: x+y-2=0$. Tìm tọa độ A, B ?

Đáp số: $A\left(4; -\frac{1}{2}\right), B\left(6; -\frac{3}{2}\right)$ hoặc $A\left(6; -\frac{3}{2}\right), B\left(4; -\frac{1}{2}\right)$.

VD 101. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (T) có tâm $I\left(\frac{-3}{2}; 0\right)$ và (T) tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 4x + 2y - 19 = 0$, đường phân giác trong của góc A có phương trình $d: x - y - 1 = 0$. Viết phương trình đường thẳng BC, biết diện tích tam giác ABC bằng ba lần diện tích tam giác IBC và điểm A có tung độ âm.

Đáp số: $BC: 2x + y - 2 = 0$ hoặc $BC: 4x + 2y + 11 = 0$.

VD 102. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(0; 2)$ và đường thẳng $d: x - 2y + 2 = 0$. Tìm trên d hai điểm M, N sao cho tam giác AMN vuông tại A và $AM = 2AN$, biết tọa độ của N là các số nguyên.

Đáp số: $M(2; 2), N(0; 1)$.

VD 103. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có cạnh AC đi qua $M(0; -1)$. Biết $AB = 2AM$, đường phân giác trong $AD: x - y = 0$, đường cao $CH: 2x + y + 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Đáp số: $A(1; 1), B(-3; -1), C\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$.

VD 104. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại đỉnh A có trọng tâm $G\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$, phương trình đường thẳng BC là $x - 2y - 4 = 0$ và phương trình đường thẳng BG là $7x - 4y - 8 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC?

Đáp số: $A(0; 3), C(4; 0), B(0; -2)$.

VD 105. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với đường cao kẻ từ đỉnh B và đường phân giác trong của góc A lần lượt có phương trình là $3x + 4y + 10 = 0$ và $x - y + 1 = 0$, điểm $M(0; 2)$ thuộc đường thẳng AB đồng thời cách C một khoảng bằng $\sqrt{2}$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC?

Đáp số: $A(4; 5); B\left(-3; -\frac{1}{4}\right); C(1; 1)$ hoặc $C\left(\frac{31}{25}; \frac{33}{25}\right)$.

VD 106. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, hãy xác định tọa độ đỉnh C của tam giác ABC biết rằng hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB là điểm $H(-1; -1)$, đường phân giác trong của góc A có phương trình $x - y + 2 = 0$ và đường cao kẻ từ B có phương trình $4x + 3y - 1 = 0$.

Đáp số: $C\left(-\frac{10}{3}; \frac{8}{4}\right)$.

VD 107. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có điểm $M\left(-\frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right)$ là trung điểm của cạnh AB, điểm $H(-2; 4)$ và điểm $I(-1; 1)$ lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tìm tọa độ điểm C.

Đáp số: $C(4; 1)$ hoặc $C(-1; 6)$.

VD 108. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có chân đường cao hạ từ đỉnh A là $H\left(\frac{17}{5}; -\frac{1}{5}\right)$, chân đường phân giác trong của góc A là $D(5; 3)$ và trung điểm của cạnh AB là $M(0; 1)$. Tìm tọa độ đỉnh C.

Đáp số: $C(9; 11)$.

VD 109. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy. Hãy viết phương trình các cạnh của tam giác ABC, biết trực tâm $H(1;0)$, chân đường cao hạ từ đỉnh B là $K(0;2)$, trung điểm cạnh AB là $M(3;1)$.

Đáp số: $AC: x - 2y + 4 = 0$, $AB: 3x - y - 8 = 0$, $BC: 3x + 4y + 2 = 0$.

VD 110. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A, có trực tâm $H(-3;2)$. Gọi D, E là chân đường cao kẻ từ B và C. Biết rằng điểm A thuộc đường thẳng $d: x - 3y - 3 = 0$, điểm $F(-2;3)$ thuộc đường thẳng DE và $HD = 2$. Tìm tọa độ điểm A.

Đáp số: $A(3;0)$.

VD 111. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-1;-3)$, $B(5;1)$. Điểm M nằm trên đoạn thẳng BC sao cho $MC = 2MB$. Tìm tọa độ điểm C biết rằng $MA = AC = 5$ và đường thẳng BC có hệ số góc là một số nguyên.

Đáp số: $C(-4;1)$.

VD 112. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại C, các đường thẳng AB, AC lần lượt có phương trình là $x + 2y = 0$ và $x - y + 6 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết trọng tâm G nằm trên trục tung.

Đáp số: $A(-4;2)$, $B\left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, $C\left(\frac{8}{3}; \frac{26}{3}\right)$.

VD 113. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại B, $AB = 2BC$. Gọi D là trung điểm của AB, E nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AC = 3EC$. Biết phương trình đường thẳng chứa CD là $x - 3y + 1 = 0$ và điểm $E\left(\frac{16}{3}; 1\right)$. Tìm tọa độ các điểm A, B, C.

Đáp số: $C(8;3)$, $A(0;-3)$.

VD 114. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có trực tâm $H(-1;3)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(3;-3)$ và chân đường cao kẻ từ đỉnh A là $K(-1;1)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

Đáp số: $A(-1;-5)$, $B(5;1)$, $C(1;1)$ hoặc $A(-1;-5)$, $B(1;1)$, $C(5;1)$.

VD 115. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $H(1;1)$ là chân đường cao kẻ từ đỉnh A, $M(3;0)$ là trung điểm cạnh BC và $\widehat{BAH} = \widehat{HAM} = \widehat{MAC}$. Tìm tọa độ các điểm A, B, C.

Đáp số: $A(1 + \sqrt{3}; 1 + 2\sqrt{3})$ hoặc $A(1 - \sqrt{3}; 1 + 2\sqrt{3})$.

VD 116. Cho $\triangle ABC$. Gọi E và F lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh B, C của tam giác ABC. Tìm tọa độ của đỉnh A biết rằng $E(7;1)$, $F\left(\frac{11}{5}; \frac{13}{5}\right)$, $BC: x + 3y - 4 = 0$, $x_B > 0$.

Đáp số: $A(7;9)$.

VD 117. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\triangle ABC$ có đường cao AH, trung tuyến CM và đường phân giác trong BD. Biết rằng $H(-4;1)$, $M(4;-2)$ và $BD: x + y - 5 = 0$. Tìm tọa độ A?

Đáp số: $A(4;-5)$.

VD 118. Cho $\triangle ABC$ có trung điểm của cạnh BC là điểm $M(3;-1)$, đường thẳng chứa đường cao kẻ từ đỉnh B đi qua điểm $E(-1;-3)$. và đường thẳng chứa cạnh AC đi qua điểm $F(1;3)$. Tìm các đỉnh, biết rằng điểm đối xứng của đỉnh A qua tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là $D(4;-2)$.

Đáp số: $A(2;2)$, $B(1;-1)$, $C(5;-1)$.

VD 119. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, cạnh $BC: \sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$, các đỉnh A và B thuộc Ox. Bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2. Tìm tọa độ trọng tâm.

Đáp số: $G\left(\frac{-1 - 4\sqrt{3}}{3}; \frac{-6 - 2\sqrt{3}}{3}\right)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 1. Trong mặt phẳng Oxy , cho ΔABC có $A(-1;0)$, $B(-6;7)$, $C(-2;2)$.

a) Viết phương trình các đường trung tuyến. Tìm tọa độ trọng tâm G và tính $S_{\Delta ABC}$?

b) Tìm tọa độ $M \in d: x - 2y - 1 = 0$ sao cho $S_{\Delta MBC} = 3S_{\Delta ABC}$?

Đáp số: $G(-3;3)$, $S_{\Delta ABC} = \frac{3}{2}$ và $M\left(\frac{9}{7}; \frac{1}{7}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{9}{7}; -\frac{8}{7}\right)$.

BT 2. Trong mặt phẳng Oxy , cho ΔABC cân tại A có trọng tâm $G\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $BC: x - 2y - 4 = 0$ và đường thẳng $BG: 7x - 4y - 8 = 0$. Tìm A , B , C .

Đáp số: $A(0;3)$, $B(0;-2)$, $C(4;0)$.

BT 3. Trong mặt phẳng Oxy , cho ΔABC vuông cân tại A có trọng tâm $G\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ và $M(1;-1)$ là trung điểm của BC . Tìm tọa độ ba đỉnh A , B , C .

Đáp số: $A(0;2)$, $B(4;0)$, $C(-2;-2)$ hoặc $A(0;2)$, $B(-2;-2)$, $C(4;0)$.

BT 4. Cho ΔABC vuông tại A , biết B và C đối xứng nhau qua gốc tọa độ. Đường phân giác trong góc B của ΔABC là đường thẳng $d: x + 2y - 5 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC , biết đường thẳng AC đi qua điểm $K(6;2)$.

Đáp số: $A\left(\frac{31}{5}; \frac{17}{5}\right)$, $B(-5;5)$, $C(5;-5)$.

BT 5. Trong mặt phẳng Oxy , cho ΔABC có các đường cao $BH: x + y - 1 = 0$, $CK: -3x + y + 1 = 0$ và cạnh $BC: 5x - y - 5 = 0$. Viết phương trình của các cạnh còn lại của ΔABC và đường cao AL ?

Đáp số: $AB: x + 3y - 1 = 0$, $AC: x - y + 3 = 0$, $AL: x + 5y - 3 = 0$.

BT 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $A(1;2)$, $B(-1;2)$ và đường thẳng d có phương trình $d: x - 2y + 1 = 0$. Hãy tìm tọa độ của điểm C thuộc đường thẳng d sao cho ba điểm A, B, C tạo thành tam giác và thỏa mãn $AB = AC$.

Đáp số: $C(3;2)$ hoặc $C\left(-\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right)$.

BT 7. Cho ΔABC có trọng tâm $G\left(1; \frac{11}{3}\right)$, đường thẳng trung trực của cạnh BC có phương trình: $x - 3y + 8 = 0$ và đường thẳng AB có phương trình $AB: 4x + y - 9 = 0$. Tìm A , B , C .

Đáp số: $A(1;5)$, $B(3;-3)$, $C(-1;9)$.

BT 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ΔABC có $BC: 9x + 11y + 5 = 0$ và hai đường phân giác trong góc B và C có phương trình lần lượt là $d_B: 2x - 3y + 12 = 0$, $d_C: 2x + 3y + 5 = 0$. Viết phương trình các cạnh của ΔABC ?

Đáp số: $B(-3;2)$, $C(8;-7)$.

BT 9. Trong mặt phẳng Oxy , cho ΔABC cân tại A . Gọi D là trung điểm của AB , và có $I\left(\frac{11}{3}; \frac{5}{3}\right)$,

$E\left(\frac{13}{3}; \frac{5}{3}\right)$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm ΔACD . Đường thẳng AB , CD lần lượt đi qua các điểm $N(-3;0)$, $M(3;-1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC biết $x_A > 0$.

Đáp số: $A(7;5)$, $B(-1;1)$, $C(3;-3)$.

BT 10. Trong mặt phẳng Oxy , cho ΔABC có chân đường cao hạ từ C xuống AB là $H(4;2)$, trung điểm của BC là $M(3;4)$, tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là $I(5;3)$. Tìm tọa độ A ?

Đáp số: $A(4;0)$ hoặc $A(8;2)$.

BT 11. Trong mặt phẳng Oxy , cho ΔABC vuông tại $A(2;3)$, $AB=2AC$. Gọi M là trung điểm AB . Hình chiếu vuông góc của điểm M lên đường thẳng BC là $K(4;9)$. Tìm tọa độ B, C .

Đáp số: $B(8;11)$, $C(-8;3)$ hoặc $B(2;13)$, $C(10;-3)$.

BT 12. Trong mặt phẳng Oxy , cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn $I(2;1)$ bán kính bằng 5. Tìm tọa độ các đỉnh ΔABC , biết trục tâm $H(-1;-1)$, $\sin \widehat{BAC} = \frac{4}{5}$ và $x_A < 0$.

BT 13. Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $P(3;0)$. và hai đường $d_1: 2x - y - 2 = 0$, $d_2: x + y + 3 = 0$. Gọi d là đường thẳng qua P và cắt d_1, d_2 lần lượt ở A và B . Viết phương trình d biết $PA = PB$.

Đáp số: $d: 4x - 5y - 12 = 0$ hoặc $d: 8x - y - 24 = 0$.

BT 14. Trong mặt phẳng Oxy , cho ΔABC vuông tại C . Gọi E, F lần lượt là 2 điểm trên cạnh AB, AC sao cho $AE = AF$, gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ đỉnh A . Đường thẳng EF cắt BC tại K . Biết rằng $E\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right)$, $D\left(\frac{7}{2}; -\frac{7}{2}\right)$, $AK: x - 2y - 3 = 0$. Tìm A, B, C .

Đáp số: $A(1;-1)$, $B\left(\frac{8}{3}; -6\right)$, $C(4;-2)$ và làm tương tự với $F\left(\frac{9}{2}; -\frac{11}{2}\right)$.

BT 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-1;2)$ và $B(3;4)$. Tìm tọa độ điểm C trên đường thẳng $x - 2y + 1 = 0$ sao cho ΔABC vuông ở C .

Đáp số: $C(3;2)$ hoặc $C\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$.

BT 16. Cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh $A(-1;4)$ và $B, C \in \Delta: x - y - 4 = 0$. Xác định tọa độ các điểm B và C , biết diện tích tam giác ABC bằng 18.

Đáp số: $B\left(\frac{11}{2}; \frac{3}{2}\right)$, $C\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right)$ hoặc $B\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right)$, $C\left(\frac{11}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

BT 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh $A(6;6)$, đường thẳng đi qua trung điểm của các cạnh AB và AC có phương trình $x + y - 4 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C , biết điểm $E(1;-3)$ nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác đã cho.

Đáp số: $B(0;-4)$, $C(-4;0)$ hoặc $B(-6;2)$, $C(2;-6)$.

BT 18. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại B , $AB = 2BC$. Gọi D là trung điểm của AB , E nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AC = 3EC$. Biết phương trình đường thẳng chứa CD là $x - 3y + 1 = 0$ và điểm $E\left(\frac{16}{3}; 1\right)$. Tìm tọa độ các điểm A, B, C .

Đáp số: $A(8;-3)$, $B(4;5)$, $C(8;3)$.

BT 19. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC gọi E và F lần lượt là chân đường cao hạ từ đỉnh B và C của tam giác ABC . Tìm tọa độ đỉnh A biết rằng $E(7;1)$, $F\left(\frac{11}{5}; \frac{13}{5}\right)$, phương trình đường thẳng $BC: x + 3y - 4 = 0$ và điểm B có tung độ dương.

Đáp số: $A(7;9)$, $B(1;1)$, $C(7;-1)$.

BT 20. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $C(-3;0)$ đường thẳng đi qua chân đường cao hạ từ đỉnh A và B có phương trình $7x + y + 5 = 0$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết điểm $M(4;1)$ thuộc đường tròn.

Đáp số: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$.

BT 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm $H(1;0)$, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết $K(0;2)$ là tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh A.

Đáp số: $A(2;-2)$, $B(-2;1)$, $C(4;4)$ hoặc $A(2;-2)$, $B(4;4)$, $C(-2;1)$.

BT 22. Cho tam giác ABC có trực tâm H, phương trình cạnh BC: $x-y+4=0$, $M(0;3)$ là trung điểm của cạnh AC, đường thẳng AH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm $N(7;-1)$. Xác định tọa độ các đỉnh A, B, C và viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Đáp số: $A\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right)$, $B\left(-\frac{7}{3}; \frac{5}{3}\right)$, $C\left(-\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

BT 23. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: x+y-1=0$, $d_2: x-y+1=0$. Lập phương trình đường tròn (C) cắt d_1 tại A và d_2 tại hai điểm B, C sao cho tam giác ABC là tam giác đều có diện tích bằng $24\sqrt{3}$ đơn vị diện tích.

Đáp số: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 32$ hoặc $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 32$.

BT 24. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đường phân giác trong của góc A nằm trên đường thẳng $d: x+y=0$, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình là $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$. Biết rằng điểm $M(3;-4)$ thuộc đường thẳng BC và điểm A có hoành độ âm. Tìm tọa độ của các điểm A, B, C.

Đáp số: $A(-2;2)$, $B(7;-1)$, $C\left(\frac{3}{5}; -\frac{29}{5}\right)$ hoặc $A(-2;2)$, $B\left(\frac{3}{5}; -\frac{29}{5}\right)$, $C(7;-1)$.

Bài 3. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN HÌNH VUÔNG – HÌNH CHỮ NHẬT

☆☆☆

VD 120. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có một đường chéo có phương trình là $d: y-3=0$. Xác định tọa độ B, D của hình vuông biết $A(4;5)$?

Đáp số: $B(2;3)$, $D(6;3)$ hoặc $B(6;3)$, $D(2;3)$.

VD 121. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có tọa độ đỉnh $A(1;1)$ và $M(5;3)$ là trung điểm của cạnh BC. Tìm tọa độ đỉnh B, biết nó có tung độ âm ?

Đáp số: $D\left(\frac{21}{5}; -\frac{7}{5}\right)$.

VD 122. (ĐH A – 2014) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có điểm M là trung điểm của đoạn AB và N là điểm thuộc đoạn AC sao cho $AN=3NC$. Viết phương trình đường thẳng CD, biết rằng $M(1;2)$ và $N(2;-1)$.

Đáp số: $CD: 3x-4y-15=0$.

VD 123. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD, gọi $M\left(\frac{11}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là trung điểm của BC,

N là điểm trên cạnh CD sao cho $CN=2ND$. Tìm tọa độ điểm A, biết $AN: 2x-y-3=0$.

Đáp số: $A(1;-1)$ hoặc $A(4;5)$.

VD 124. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD, gọi M là trung điểm của AB, G là trọng tâm $\triangle BCD$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD, biết $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $G\left(-\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\right)$.

Đáp số: $\left[A(1;1), B(-2;0), C(-1;-3), D(2;-2) \right]$
 $A\left(-\frac{35}{17}; \frac{13}{17}\right), B\left(\frac{18}{17}; \frac{4}{17}\right), C\left(\frac{9}{17}; -\frac{49}{17}\right), D\left(-\frac{44}{17}; -\frac{40}{17}\right)$

BT 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$, có đỉnh $C(3;-3)$. Gọi M là trung điểm của BC , phương trình $DM: x - y - 2 = 0$ và $A \in d: 3x + y - 2 = 0$. Tìm A, B, D .

Đáp số: $A(-1;5), B(-3;-1), D(5;3)$ hoặc $D(-3;-5) \Rightarrow A, B$.

VD 125. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 2AB$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AD, BC . Trên đường thẳng MN lấy điểm K sao cho N là trung điểm của đoạn thẳng MK . Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết $K(5;-1)$, phương trình đường thẳng chứa cạnh $AC: 2x + y - 3 = 0$ và điểm A có tung độ dương.

Đáp số: $A(1;1), B(3;1), C(3;-3)$.

VD 126. Trong mặt phẳng Oxy , cho hình vuông $ABCD$, gọi M trung điểm của đoạn BC , N là điểm thuộc đoạn AC thỏa $AN = 3NC$. Tìm tọa độ ba đỉnh A, B, C của hình vuông $ABCD$ biết đỉnh $D(5;1)$ đường thẳng MN có phương trình $3x - y - 4 = 0$.

Đáp số: $A(1;1), B(1;5), C(5;5)$.

VD 127. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình vuông $ABCD$ có $A(-1;1)$, điểm M thuộc cạnh BC sao cho $MC = 2MB$, điểm N thuộc cạnh CD sao cho $\angle MAN = 45^\circ$. Tìm tọa độ đỉnh C , biết đường thẳng đi qua 2 điểm M và N có phương trình là: $7x + y - 24 = 0$ và điểm N có tung độ âm.

Đáp số: $C(5;1)$.

VD 128. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$. Trên các cạnh AD, AB lần lượt lấy hai điểm E và F sao cho $AE = AF$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BE . Tìm tọa độ của C biết C thuộc đường thẳng $d: x - 2y + 1 = 0$ và tọa độ $F(2;0), H(1;-1)$.

Đáp số: $C\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

VD 129. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$. Gọi E là trung điểm của cạnh AD , $H\left(\frac{11}{5}; -\frac{2}{5}\right)$ là hình chiếu vuông góc của B lên CE và $M\left(\frac{3}{5}; -\frac{6}{5}\right)$ là trung điểm của đoạn BH . Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$, biết điểm A có hoành độ âm.

Đáp số: $A(-1;2), B(-1;-2), C(3;-2), D(3;2)$.

VD 130. Cho hình vuông $ABCD$ có các đỉnh $A(-1;2), C(3;-2)$. Gọi E trung điểm của cạnh AD , BM là đường thẳng vuông góc với CE tại M , N là trung điểm của BM và P là giao điểm của AN với DM . Biết phương trình đường thẳng $BM: 2x - y - 4 = 0$. Tìm tọa độ điểm P .

Đáp số: $P\left(\frac{19}{5}; -\frac{2}{5}\right)$.

VD 131. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình vuông $ABCD$, có điểm $M(4;2)$ là trung điểm BC , điểm E thuộc cạnh CD sao cho $CE = 3DE$, phương trình đường thẳng $AE: 4x + y - 4 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh A biết A có tung độ dương.

Đáp số: $A(0;4)$.

VD 132. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$, $A(-1;2)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và DC , E là giao điểm của BN với CM . Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác BME biết $BN: 2x + y - 8 = 0$ và B có hoành độ lớn hơn 2.

Đáp số: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$.

- VD 133.** Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-4)^2 + (y+3)^2 = 4$ và đường $d: x+y-1=0$. Xác định tọa độ đỉnh A của hình vuông $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (C) , biết rằng $A \in d$.
 Đáp số: $A(2;-1)$ hoặc $A(6;5)$.
- VD 134.** Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ ngoại tiếp $(C): (x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$. Đường thẳng AB đi qua điểm $M(-3;-2)$. Tìm A , biết $x_A > 0$.
 Đáp số: $A(6;1)$.
- VD 135.** Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có M là trung điểm của cạnh BC , phương trình đường $DM: x-y-2=0$, đỉnh $C(3;-3)$ và $A \in d: 3x+y-2=0$. Tìm tọa độ B ?
 Đáp số: $B(-3;-1)$.
- VD 136.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I(6;2)$ và điểm $M(1;5)$ nằm trên đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng $d: x+y-5=0$. Viết phương trình AB ?
 Đáp số: $AB: y-5=0$ hoặc $AB: x-4y+19=0$.
- VD 137.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có đường chéo AC có phương trình là $x+y-10=0$. Tìm tọa độ của điểm B biết rằng đường thẳng CD đi qua điểm $M(6;2)$, đường thẳng AB đi qua điểm $N(5;8)$.
 Đáp số: $B(8;8)$ hoặc $B(5;4)$.
- VD 138.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 48, đỉnh $D(-3;2)$. Đường phân giác của góc \widehat{BAD} có phương trình $\Delta: x+y-7=0$. Tìm tọa độ đỉnh B biết đỉnh A có hoành độ dương.
 Đáp số: $A(5;2)$, $B(5;8)$.
- VD 139.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có các đỉnh A, B thuộc đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 + 2x + 5y + 1 = 0$, các đỉnh A, D thuộc đường tròn $(C_2): x^2 + y^2 - 2x - 3y - 3 = 0$. Viết phương trình các cạnh của hình chữ nhật đó biết diện tích của nó bằng 20 và đỉnh A có hoành độ âm.
 Đáp số: $\begin{cases} AB: x+1=0, AD: y=0, CD: x-3=0, BC: y+5=0 \\ AB: 4x+3y+4=0, AD: 3x-4y+3=0, CD: 4x+3y-21=0, BC: 3x-4y-17=0 \end{cases}$
- VD 140.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ACBD$. Hai điểm B, C thuộc trục tung. Phương trình đường chéo $AC: 3x+4y-16=0$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật đã cho biết rằng bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ACD bằng 1.
 Đáp số: $A(-4;7)$, $B(0;-7)$, $C(0;4)$, $D(-4;4)$.
- VD 141.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB: x-2y+1=0$, đường chéo $BD: x-7y+14=0$, đường thẳng AC đi qua điểm $M(2;1)$. Tìm tọa độ các đỉnh hình chữ nhật?
 Đáp số: $A(3;2)$, $B(\frac{21}{5}; \frac{13}{5})$, $C(4;3)$, $D(\frac{14}{5}; \frac{12}{5})$.
- VD 142.** Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I(\frac{1}{2}; 0)$, phương trình đường thẳng $AB: x-2y+2=0$ và có $AB=2AD$. Tìm tọa độ các đỉnh của $ABCD$, biết $x_A < 0$.
 Đáp số: $A(-2;0)$, $B(2;2)$, $C(3;0)$, $D(-1;-2)$.
- VD 143.** Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có các cạnh AB, BC, CA, AD lần lượt đi qua các điểm $M(4;5)$, $N(6;5)$, $P(5;2)$, $Q(2;1)$. Viết phương trình AB , biết $S_{ABCD} = 16$.
 Đáp số: $AB: x-y+1=0$ hoặc $AB: x-3y+11=0$.

VD 144. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$, biết $AB = 2BC$. Đường thẳng AB qua điểm $M\left(-\frac{4}{3}; 1\right)$, đường thẳng BC đi qua điểm $N(0; 3)$, đường thẳng AD đi qua điểm $P\left(4; -\frac{1}{3}\right)$, đường thẳng CD đi qua $Q(6; 2)$. Viết phương trình các cạnh $ABCD$.

Đáp số: $\begin{cases} AB: 3x + 17y - 13 = 0 \\ BC: 17x - 3y + 9 = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} AB: 3x - 9y + 13 = 0 \\ BC: 9x + 3y + 3 = 0 \end{cases}$.

VD 145. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có phương trình cạnh $AB: x - 2y - 1 = 0$, phương trình đường chéo là $BD: x - 7y + 14 = 0$, điểm $M(2; 1)$ nằm trên đường chéo AC . Tìm tọa độ điểm A ?
Đáp số: $A(1; 0)$.

VD 146. Trong mặt phẳng Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$ và độ dài đường chéo bằng $\sqrt{26}$. Đường thẳng AB, AD lần lượt đi qua các điểm $M(2; 3), N(-1; 2)$. Tìm tọa độ điểm A ?
Đáp số: $A(0; 1)$ hoặc $A\left(\frac{7}{5}; \frac{19}{5}\right)$.

VD 147. Trong mặt phẳng Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2AD$, đường $AB: x - y + 1 = 0$. Gọi N là điểm trên cạnh CD sao cho $NC = 3ND$, điểm $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là trung điểm cạnh BC , khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng AN bằng 4. Tìm tọa độ A , biết $x_A > 0$.
Đáp số: $A\left(\frac{\sqrt{166}}{4}; \frac{\sqrt{166}}{4} + 1\right)$.

VD 148. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có đỉnh $B \in d_1: 2x - y + 2 = 0$, đỉnh $C \in d_2: x - y - 5 = 0$. Gọi H là hình chiếu của B xuống đường chéo AC . Biết $M\left(\frac{9}{5}; \frac{2}{5}\right), K(9; 2)$ lần lượt là trung điểm của AH và CD . Tìm A, B, C, D , biết $x_C > 4$.
Đáp số: $A(1; 0), B(1; 4), C(9; 4), D(9; 0)$.

VD 149. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có $A(0; 2)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên AC . Trên tia đối của BH , lấy điểm E sao cho $BE = AC$. Biết phương trình đường thẳng $DE: x - y = 0$. Tìm B, C, D , biết $S_{ABCD} = 6$ và $y_B > 0$.
Đáp số: $B(0; 5), C(2; 5), D(2; 2)$ hoặc $B(3; 2), C(0; 3), D(2; 2)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$, có điểm $B(2; 4)$, trung điểm cạnh AD là $E(-1; 0)$ và $F(2; -1)$ là trung điểm cạnh CD . Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông ?
Đáp số: $A(-2; 2), D(0; -2)$.

BT 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$, có tâm $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$. Hai đỉnh A, B lần lượt nằm trên hai đường thẳng $d_1: 3x + 4y - 8 = 0$ và $d_2: 3x + 4y - 1 = 0$. Tìm A, B, C, D .

Đáp số: $A(-4; 5), B(-1; 1), C(3; 4), D(0; 8)$
 $A\left(\frac{24}{25}; \frac{32}{25}\right), B\left(-\frac{93}{25}; \frac{76}{25}\right), C\left(-\frac{49}{25}; \frac{192}{25}\right), D\left(\frac{68}{25}; \frac{149}{25}\right)$.

BT 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$, có $A(-3;1)$, $C \in d: x-2y-5=0$. Gọi E là giao điểm thứ hai của đường tròn tâm B , bán kính BD với đường thẳng CD . Hình chiếu vuông góc của D xuống đường thẳng BE là $N(6;-2)$. Tìm tọa độ B, C, D ?

Đáp số: $B(-2;-2), C(7;1), D(6;4)$.

BT 29. Trong mặt phẳng Oxy , cho hình vuông $ABCD$, có $B(3;4)$ và đường chéo $AC: x-y+2=0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông ?

Đáp số: $A(2;4), C(3;5), D(2;5)$ hoặc $A(3;5), C(2;4), D(2;5)$.

BT 30. Trong mặt phẳng Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có $A(-2;6)$, đỉnh $B \in d: x-2y+6=0$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên hai cạnh BC, CD sao cho $\frac{BM}{CN} = \frac{AB}{AC}$. Biết AM và BN cắt nhau tại điểm $I\left(\frac{2}{5}; \frac{15}{5}\right)$. Tìm tọa độ điểm M ?

Đáp số: $M(1;2)$.

BT 31. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(-11;3), B(9;-7)$. Lập phương trình đường thẳng song song với AB và cắt đường tròn đường kính AB tại hai điểm phân biệt C, D , cùng với hình chiếu của C và D trên AB tạo thành một hình vuông ?

Đáp số: $d: x+2y+5 \pm 10\sqrt{5} = 0$.

BT 32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$, có tâm I có hoành độ bằng $\frac{9}{2}$ và nằm trên đường thẳng $d: x-y-3=0$, trung điểm của cạnh BC là giao điểm của d với trục hoành. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ?

Đáp số: $A\left(\frac{9}{2}; \frac{9}{2}\right), B\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right), C\left(\frac{9}{2}; -\frac{3}{2}\right), D\left(\frac{15}{2}; \frac{3}{2}\right)$ hoặc $A\left(\frac{15}{2}; \frac{3}{2}\right), B\left(\frac{9}{2}; -\frac{3}{2}\right), C\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right), D\left(\frac{9}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

BT 33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$, có $CD: x-2y+1=0$, điểm $M(2;3)$ nằm trên đường thẳng BC , điểm $N(-1;1)$ nằm trên đường thẳng AB . Tìm tọa độ B, C và viết phương trình đường thẳng AD , biết $AM \perp DN$.

Đáp số: $B\left(\frac{11}{5}; \frac{13}{5}\right), C\left(\frac{13}{5}; \frac{9}{5}\right), AD: 2x+y \pm \frac{17+2\sqrt{21}}{5} = 0$.

BT 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $d_1: x-3y=0, d_2: 2x+y-5=0, d_3: x-y=0$. Tìm tọa độ các điểm $A \in d_1, B \in d_2$ và $C, D \in d_3$ sao cho $ABCD$ là hình vuông ?

Đáp số: $A\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right), B(2;1), C(1;1), D\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ hoặc $A\left(\frac{15}{4}; \frac{5}{4}\right), B\left(\frac{5}{2}; 0\right), C\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right), D\left(\frac{15}{4}; \frac{15}{4}\right)$.

BT 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(2;3), B(5;2), C(8;6)$. Tìm điểm $D \in d: x-y+3=0$ để hình vuông $MNPQ$ có các cạnh MN, NP, PQ, QM đi qua các điểm A, B, C, D sao cho diện tích $MNPQ$ đạt giá trị lớn nhất ?

Đáp số: $D(7;10)$ hoặc $D(-27;-24)$.

BT 36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có đỉnh $D(-1;3)$, đường phân giác trong của góc \widehat{DAB} có phương trình là $x-y+6=0$. Tìm B , biết $S_{ABCD} = 18$ và $|x_A| = |y_A|$.

Đáp số: $B(-3;-6)$ hoặc $B(-3;12)$.

BT 37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$, có tâm $I(1;1), M(-2;2) \in$ cạnh AB và điểm $N(2;-2) \in$ cạnh CD . Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông ?

Đáp số: $A(1;5), B(-3;1), C(1;-3), D(5;1)$ hoặc $A(-3;1), B(1;5), C(5;1), D(1;-3)$.

BT 38. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng $2\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD , biết $M(0;1)$, $AN: 2x\sqrt{2} + y - 4 = 0$. Tìm tọa độ A ?

Đáp số: $A(\sqrt{2};0)$ hoặc $A\left(\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

BT 39. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$, có tâm $I(1;-1)$. Gọi M là điểm trên cạnh CD thỏa $MC = 2MD$. Tìm tọa độ A, B, C, D , biết $AM: 2x - y - 5 = 0$.

Đáp số: $A(1;-3), B(-1;-1), C(1;1), D(3;-1)$ và làm tương tự cho $3b + 4a = 0$.

BT 40. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$, có $A \in d: x - y - 4 = 0$, $M(4;0) \in BC$, điểm $N(0;2) \in CD$ sao cho $\triangle AMN$ cân tại A . Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông?

Đáp số: $A(-1;-5), B(5;-3), C(3;3), D(-3;1)$ và làm tương tự với $3a + b = 0$.

BT 41. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$, có $C \in d: x + 3y - 7 = 0$ và $A(1;5)$. Gọi M là điểm nằm trên tia đối của tia CB sao cho $MC = 2BC$, N là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng MD . Tìm B, C biết $N\left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Đáp số: $B(5;-1), C(2;-3)$.

BT 42. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 6 và phương trình đường chéo $AC: x + 2y - 9 = 0$. Đường thẳng AB đi qua điểm $M(5;5)$, đường thẳng AD đi qua điểm $N(5;1)$. Tìm tọa độ các đỉnh hình chữ nhật $ABCD$.

Đáp số: $\begin{cases} A(3;3), B(4;4), C(7;1), D(6;0) \\ A(3;3), B(2;2), C(-1;5), D(0;6) \end{cases}$ và làm tương tự với trường hợp $A\left(\frac{31}{5}; \frac{7}{5}\right)$.

BT 43. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$, có $B, D \in Ox$ và $A \in d_1: x - y = 0$, điểm $C \in d_2: 2x + y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông?

Đáp số: $A(1;1), B(0;0), C(1;-1), D(2;0)$ hoặc $A(1;1), B(2;0), C(1;-1), D(0;0)$.

BT 44. Cho hình vuông $ABCD$, có tâm $I(1;-1)$, $M \in CD$, $MC = 2MD$, $AM: 2x - y + 7 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$?

Đáp số: $A(-7;-7), B(-5;7), C(9;5), D(7;-9)$ hoặc $A(-7;-7), B(7;-9), C(9;5), D(-5;7)$.

BT 45. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$, có diện tích bằng 16 và đỉnh $A(-1;-2)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình chữ nhật $ABCD$, biết đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ có phương trình là $(C): (x+2)^2 + (y-1)^2 = 10$ và $x_B > 0$.

Đáp số: $B(1;0), C(-3;4), D(-5;2)$.

BT 46. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$, có diện tích 4 và tâm $I(3;-1), B(4;0)$.

Gọi K là điểm nằm trên CD để góc giữa đường thẳng BK và CD bằng α với $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Tìm tọa độ các đỉnh A, C, D biết rằng $x_K > 0$.

Đáp số: $A(4;-2), C(2;0), D(2;-2)$ và làm tương tự khi $ABDK$ là hình bình hành.

BT 47. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$, có $D(-1;2)$. Gọi M là trung điểm của BC và N là điểm trên cạnh AC sao cho $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{4}$, đường $MN: x - y + 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông, biết $x_M > 0$.

Đáp số: $A\left(-\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right), B\left(\frac{7}{5}; \frac{6}{5}\right), C\left(\frac{3}{5}; \frac{14}{5}\right)$ và làm tương tự khi $a + 2b = 0$.

BT 48. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$, có $M(1;2)$ là trung điểm của cạnh BC . Phương trình đường trung tuyến kẻ từ A của $\triangle ADM$ là $d: 5x - y + 1 = 0$. Tìm B , biết $x_A > 0$.

Đáp số: $B\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$ hoặc $B\left(\frac{3}{10}; \frac{21}{10}\right)$.

BT 49. Trong mặt phẳng Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$, có $S_{ABCD} = 2\sqrt{5}$ và nội tiếp đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$. Đường chéo $AC \perp d: 2x - y - 1 = 0$. Tìm B , biết $x_A < x_C$.

Đáp số: $B(1;0)$ hoặc $B\left(\frac{9}{5}; -\frac{2}{5}\right)$ hoặc $B\left(1 \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}; -1 \mp \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

BT 50. Cho hình chữ nhật $ABCD$, có $AB = 2BC$, $A(1;1)$, tâm $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$. Tìm tọa độ B, D ?

Đáp số: $B(1;-1), D(0;1)$ hoặc $B\left(-\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right), D\left(\frac{8}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

BT 51. Cho hình chữ nhật $ABCD$, có $AD: x - y + 1 = 0$, $M\left(\frac{16}{5}; \frac{12}{5}\right) \in BD$ và trung điểm cạnh CD là điểm $N(6;5)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$?

Đáp số: $A(-1;0), B(1;-2), C(7;4), D(5;6)$.

BT 52. Cho hình chữ nhật $ABCD$, có $S_{ABCD} = 3$, $AC: x + 2y - 9 = 0$, $M(-4;5) \in BC$, $N(1;2) \in CD$. Tìm tọa độ đỉnh A , biết đỉnh C có hoành độ âm ?

Đáp số: $A(\pm 2\sqrt{2} - 3; 6 \mp \sqrt{2})$.

BT 53. Cho hình chữ nhật $ABCD$, có $B \in d_1: 2x - y + 2 = 0$, $C \in d_2: x - y - 5 = 0$. Gọi H là hình chiếu của B xuống đường chéo AC và có $M\left(\frac{9}{5}; \frac{2}{5}\right), K(9;2)$ lần lượt là trung điểm của AH và CD .

Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật, biết $x_C > 4$.

Đáp số: $A(1;0), B(1;4), C(9;4), D(9;0)$.

BÀI 4. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN HÌNH BÌNH HÀNH

☆☆☆

VD 150. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$, có số đo diện tích bằng 4. Biết tọa độ các đỉnh $A(1;0), B(2;0)$ và giao điểm I của hai đường chéo AC và BD nằm trên đường thẳng $d: x - y = 0$. Hãy tìm tọa độ các đỉnh C và D ?

Đáp số: $C(3;4), D(2;4)$ hoặc $C(-5;-4), D(-6;-4)$.

VD 151. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$, có tâm $I(2;2)$ và phương trình hai cạnh xuất phát từ một đỉnh có phương trình là $2x - y = 0, 4x - 3y = 0$. Tìm A, B, C, D ?

Đáp số: $A(0;0), B\left(\frac{2}{5}; -\frac{4}{5}\right), C(4;4), D(6;8)$.

VD 152. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$, có tâm $I(2;-5)$ và đường phân giác góc BAC có phương trình $2x + y - 4 = 0$, biết ΔACD có trọng tâm $G\left(-\frac{1}{3}; -\frac{14}{3}\right)$, tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành $ABCD$?

Đáp số: $A(1;2), B(9;-6), C(3;-12), D(-5;-4)$.

VD 153. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$, có $D(6;6)$, $\Delta_1: 2x + 3y + 17 = 0$ là đường trung trực của đoạn thẳng CD và $\Delta_2: 5x + y - 3 = 0$ là đường phân giác của góc BAC . Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình bình hành.

Đáp số: $A(1;-2), B(5;4), C(-2;0)$.

VD 154. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ΔABC có đường cao kẻ từ đỉnh B có phương trình là $x + y + 1 = 0$, gọi D là điểm đối xứng của C qua trung điểm của cạnh AB . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ΔABC , biết tọa độ điểm $D(3;4)$ và $H(-1;0)$ là trực tâm của ΔABC , điểm A có tọa độ nguyên và thuộc đường thẳng $2x - y - 6 = 0$.

Đáp số: $A(3;0)$, $B(-1;0)$, $C(-1;-4)$.

VD 155. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$, có diện tích bằng 16. Biết ΔABC cân tại A , $BC = 4$ và $K\left(\frac{21}{5}; \frac{18}{5}\right)$ là hình chiếu của điểm B xuống cạnh AC . Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành $ABCD$, biết $B \in d: x + y - 3 = 0$, đồng thời $x_B, x_C \in \mathbb{Z}$.

Đáp số: $B(1;2)$, $C(5;2)$.

VD 156. (ĐH B - 2014) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$. Điểm $M(-3;0)$ là trung điểm của cạnh AB , điểm $H(0;-1)$ là hình chiếu vuông góc của B trên AD và $G\left(\frac{4}{3}; 3\right)$ là trọng tâm của ΔBCD . Tìm tọa độ các điểm B và D ?

Đáp số: $B(-2;3)$, $D(2;0)$.

VD 157. Trong mặt phẳng Oxy , cho hình bình hành $ABCD$, có $5BD = AC\sqrt{10}$. Gọi hình chiếu vuông góc của điểm D lên các đường thẳng AB , BC lần lượt là $M(-2;-1)$ và $N(2;-1)$, biết AC nằm trên đường thẳng $d: x - 7y = 0$. Tìm tọa độ A , C ?

Đáp số: $A\left(-\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $C\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

VD 158. Trong mặt phẳng Oxy , cho hình bình hành $ABCD$, có đỉnh $B(1;5)$, gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BC , và $AH: x + 2y - 2 = 0$, phương trình đường phân giác trong \widehat{ACB} là $d: y = x - 1$. Tìm tọa độ A , C , D .

Đáp số: $A(4;-1)$, $B(-4;-5)$, $D(-1;-11)$.

VD 159. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$, có $A(2;1)$, đường chéo BD có phương trình $x + 2y + 1 = 0$. Điểm M nằm trên đường thẳng AD sao cho $AM = AC$, đường thẳng $MC: x + y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình bình hành $ABCD$?

Đáp số: $B\left(-2; \frac{1}{2}\right)$, $D\left(12; -\frac{13}{2}\right)$, $C(8;-7)$.

VD 160. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$, có diện tích bằng 3, đỉnh $A(2;-3)$, $C(3;-2)$ và trọng tâm ΔABC là $G \in d: y = 3x - 8$. Viết phương trình các cạnh hình bình hành.

Đáp số: $\begin{cases} AB: 7x - 4y - 26 = 0, BC: 8x - y + 6 = 0, CD: 7x - 4y - 29 = 0, AD: 8x - 9y - 43 = 0 \\ AB: 2x + y - 1 = 0, BC: x + 2y - 1 = 0, CD: 2x + y - 4 = 0, AD: x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$

VD 161. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$, có đường chéo $AC: x - y + 1 = 0$, điểm $G(1;4)$ là trọng tâm ΔABC , điểm $E(0;-3)$ thuộc đường cao kẻ từ D của ΔACD . Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành $ABCD$, biết $S_{AGCD} = 32$ và $y_A > 0$.

Đáp số: $A(5;6)$, $B(1;8)$, $C(-3;-2)$, $D(1;-4)$.

VD 162. Trong mặt phẳng Oxy , cho hình bình hành $ABCD$, có tâm $I(-1;3)$ và trọng tâm ΔABD là điểm $G\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$. Viết phương trình các cạnh của hình bình hành $ABCD$, biết các cạnh AB , AD

là hai tiếp tuyến kẻ từ đỉnh A đến đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y-3)^2 = 10$.

Đáp số: $AB: x\sqrt{3} + y\sqrt{5} + \sqrt{5} - 3\sqrt{3} = 0$, $AD: x\sqrt{3} - y\sqrt{5} - \sqrt{5} - 3\sqrt{3} = 0$.

- VD 163.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hình bình hành $ABCD$, có $\triangle ABD$ vuông tại D . Hình chiếu vuông góc của hai đỉnh B, D xuống đường chéo AC lần lượt là $H\left(\frac{22}{5}; \frac{14}{5}\right), K\left(\frac{13}{5}; \frac{11}{5}\right)$. Hãy tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành $ABCD$, biết $BD = 3\sqrt{2}$.
- Đáp số: $A(8;4), B(2;4), C(-1;1), D(5;1)$ và làm tương tự khi $B\left(\frac{16}{5}; \frac{2}{5}\right), D\left(\frac{19}{5}; \frac{23}{5}\right)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

- BT 54.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $x + y - 1 = 0$ và $3x - y + 5 = 0$. Hãy tìm diện tích hình bình hành có hai cạnh nằm trên hai đường thẳng đã cho, một đỉnh là giao điểm của hai đường thẳng đó và giao điểm của hai đường chéo là $I(3;3)$.
- Đáp số: $S_{ABCD} = 55$ (đvdt).
- BT 55.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có G là trọng tâm $\triangle BCD$, phương trình đường thẳng $DG: 2x - y + 1 = 0$, phương trình $BD: 5x - 3y + 2 = 0$ và $C(0;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, D của hình bình hành.
- Đáp số: $A(1;1), B(2;4), D(-1;-1)$.
- BT 56.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$, có diện tích bằng 4, đỉnh $A(2;2), B(-2;1)$. Biết tâm I là giao điểm của hai đường chéo AC, BD nằm trên đường thẳng $d: x - 3y + 2 = 0$. Tìm tọa độ của C và D .
- BT 57.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$, có các đỉnh $A(0;1), B(3;4)$. Tìm tọa độ các đỉnh D, C , biết giao điểm I của hai đường chéo nằm trên cung \widehat{AB} của parabol $y = (x - 1)^2$ sao cho diện tích hình bình hành đạt giá trị lớn nhất?
- Đáp số: $C\left(3; -\frac{1}{2}\right), D\left(0; -\frac{7}{2}\right)$.
- BT 58.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$, có tâm $I\left(1; -\frac{1}{2}\right)$, phương trình cạnh $AD: 3x + y + 5 = 0$, đường thẳng AB đi qua điểm $M(6;2)$ và hợp với đường AD một góc bằng 45° . Viết phương trình các cạnh còn lại của hình bình hành, biết $BD \perp AB$.
- Đáp số: $AB: 2x - y - 10 = 0, BC: 3x + y - 10 = 0, CD: 2x - y + 5 = 0$.
- BT 59.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$, có $A(1;1), B(4;5)$. Tâm I của hình bình hành thuộc đường $d: x + y + 3 = 0$. Tìm tọa độ C, D , biết $S_{ABCD} = 9$.
- Đáp số: $C(-2;-6), D(-5;-10)$ hoặc $C\left(-\frac{32}{7}; -\frac{24}{7}\right), D\left(-\frac{53}{7}; -\frac{52}{7}\right)$.
- BT 60.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tứ giác $MNPQ$ với $M(-1;-3), N\left(4; -\frac{4}{3}\right), P(4;1), Q(-3;1)$ và điểm $I\left(1; -\frac{1}{2}\right)$. Tìm tọa độ các điểm A, B, C, D lần lượt nằm trên các đường thẳng MN, NP, PQ, QM sao cho $ABCD$ là hình bình hành nhận I làm tâm.
- Đáp số: $A(2;-2), B(4;0), C(0;1), D(-2;-1)$.
- BT 61.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có $C(3;-1)$, đường thẳng chứa BD và đường thẳng chứa đường phân giác của góc \widehat{DAC} lần lượt là $x - 2y - 1 = 0$ và $x - 1 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình bình hành $ABCD$.
- Đáp số: $A(1;2), B(5;3), D(-1;-1)$.

- BT 62.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có $D(-6; -6)$. Đường trung trực của đoạn DC có phương trình $d_1: 2x + 3y + 17 = 0$ và đường phân giác góc \widehat{BAC} có phương trình $d_2: 5x + y - 3 = 0$. Tìm các đỉnh còn lại của hình bình hành $ABCD$.
Đáp số: $A(1; -2)$, $B(5; 4)$, $C(-2; 0)$.

BÀI 5. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN HÌNH THANG

- VD 164.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang cân $ABCD$ có hai đáy AB, CD . Biết hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau. Biết $A(0; 3)$, $B(3; 4)$ và C nằm trên trục hoành. Xác định tọa độ đỉnh D của hình thang $ABCD$.
Đáp số: $D(0; -2)$.
- VD 165.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hình thang cân $ABCD$ có đáy lớn là CD , $A(0; 2)$, $D(-2; -2)$ và giao điểm I của AC, BD nằm trên đường thẳng $x + y - 4 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình thang khi biết $\widehat{AID} = 45^\circ$.
Đáp số: $B(2 + \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$, $C(2 + 4\sqrt{2}; 2 + 4\sqrt{2})$ hoặc $B(4 + 3\sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$, $C(4 + 4\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$.
- VD 166.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là AB, CD , đỉnh $A(0; -4)$, $B(4; 0)$. Tìm tọa độ C, D , biết $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$.
Đáp số: $C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $D\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.
- VD 167.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D có đáy lớn CD , đường thẳng $AD: 3x - y = 0$, đường $BD: x - 2y = 0$, góc $\widehat{BCD} = 45^\circ$ và $S_{ABCD} = 24$. Tìm tọa độ đỉnh B , biết rằng điểm B có hoành độ dương?
Đáp số: $B\left(\frac{8\sqrt{10}}{5}; \frac{4\sqrt{10}}{5}\right)$.
- VD 168.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là AB và CD , có đỉnh $A(1; 1)$ và trung điểm của cạnh BC là $M\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. Tìm tọa độ đỉnh D có hoành độ dương và nằm trên đường thẳng $d: 5x - y + 1 = 0$, biết diện tích hình thang $ABCD$ bằng 14.
Đáp số: $D(2; 11)$.
- VD 169.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang vuông $ABCD$ tại A và D , có $CD = 2AB$, đỉnh $B(1; 2)$. Hình chiếu vuông góc hạ từ D lên AC là điểm $H(-1; 0)$. Gọi N là trung điểm HC . Tìm tọa độ A, C, D , biết $DN: x - 2y - 2 = 0$.
Đáp số: $A\left(-\frac{7}{8}; 0\right)$, $C(5; 0)$, $D\left(-1; -\frac{3}{2}\right)$.
- VD 170.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang vuông $ABCD$ tại A và D , có $CD = 2AB$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên đường chéo AC , biết $M\left(\frac{22}{5}; \frac{14}{5}\right)$ là trung điểm của HC , đỉnh $D(2; 2)$, đỉnh $B \in d: x - 2y + 4 = 0$ và đường BC đi qua $E(5; 3)$. Tìm A, B, C ?
Đáp số: $A(2; 4)$, $B(4; 4)$, $C(2; 6)$.
- VD 171.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang vuông $ABCD$ tại A và D , có $AB = 2CD$ và $BD \perp AC$. Tìm tọa độ các đỉnh $ABCD$ của hình thang. Biết điểm $M(5; -3)$ là trung điểm của

đoạn AB , đường thẳng đi qua hai điểm B, D có phương trình $\sqrt{2}x + 2y + 6 - 8\sqrt{2} = 0$, tọa độ điểm B nguyên.

Đáp số: $A(2; -3), B(8; -3), C(5; 3\sqrt{2} - 3), D(2; 3\sqrt{2} - 3)$.

VD 172. Cho hình thang vuông $ABCD$ tại B, C có $3CD = 3BC = 2AB$, $AB: y - 1 = 0$. Gọi M là trung điểm của đoạn CD và $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ là giao điểm của BD và AM . Tìm tọa độ điểm M , biết $x_B > 1$.

Đáp số: $M\left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

VD 173. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang vuông $ABCD$ tại A, D , có $BC = CD = 2AB$. Gọi $M(1; 0)$ là trung điểm của BC và $AD: x - y\sqrt{2} = 0$. Tìm tọa độ điểm A ?

Đáp số: $A\left(\frac{6+\sqrt{6}}{9}; \frac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{9}\right)$ hoặc $A\left(\frac{6-\sqrt{6}}{9}; \frac{-\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{9}\right)$.

VD 174. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang cân $ABCD$ có đáy lớn là CD và $S_{ABCD} = \frac{45}{2}$.

Phương trình $CD: x - 3y - 3 = 0$, $AC \perp BD$ tại $I(2; 3)$. Viết phương trình BC , biết $x_C > 0$.

Đáp số: $BC: 4x + 3y - 27 = 0$.

VD 175. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang cân $ABCD$ diện tích bằng 18, đáy lớn CD nằm trên đường thẳng có phương trình $x - y + 2 = 0$. Biết hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau và cắt nhau tại điểm $I(3; 1)$. Viết phương trình BC , biết $x_C < 0$.

Đáp số: $BC: x + 2y - 1 = 0$.

VD 176. Cho hình thang $ABCD$, ($AB \parallel CD$), có $B(3; 3), C(5; -3)$. Giao điểm I của hai đường chéo nằm trên đường thẳng $d: 2x + y - 3 = 0$. Tìm tọa độ A, D , biết $CI = 2BI$, $S_{\triangle ABC} = 12$, $x_I > 0$, $x_A < 0$.

Đáp số: $A(-1; 3), D(-3; -3)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 63. Trong mặt phẳng Oxy , cho hình thang $ABCD$, ($AB \parallel CD$), có $A(0; 2)$, $CA \perp AD$, $AD = 3AC$, $CD: x + 2y - 2 = 0$ và M là trung điểm AC , biết $BM \perp AC$. Tìm tọa độ điểm B ?

Đáp số: $B\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$ hoặc $B\left(-\frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

BT 64. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang vuông $ABCD$ tại A, D , có $BC = 2AB = 2AD$. Trung điểm của BC là điểm $M(1; 0)$, $AD: x - y\sqrt{3} + 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm A biết $DC > AB$.

Đáp số: $A(2\sqrt{3} - 3; 2)$ hoặc $A(3 - 2\sqrt{3}; 2\sqrt{3} - 2)$.

BT 65. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang vuông $ABCD$ tại A, D , điểm A, B thuộc trục Ox , đường thẳng BC có phương trình $x + y - 5 = 0$, độ dài đoạn thẳng $AD = 2$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang biết diện tích hình thang bằng 12 và tung độ các điểm C, D dương.

Đáp số: $A(10; 0), B(5; 0), C(3; 2), D(10; 2)$ hoặc $A(-2; 0), B(5; 0), C(3; 2), D(-2; 2)$.

BT 66. Trong mặt phẳng Oxy , cho hình thang $ABCD$, ($AB \parallel CD$), có $N(0; 2)$ là trung điểm của BC , $AN \perp DN$, $M(0; 1) \in AD$, $E(-1; 1) \in CD$. Tìm A ?

Đáp số: $A(1; 1)$.

BT 67. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang cân $ABCD$, ($AB \parallel CD$), $CD = 2AB$ có $A(2; -1), B(4; 1)$ và điểm $M(-5; -4)$ thuộc đáy lớn. Tìm tọa độ C, D ?

Đáp số: $C(3; 4), D(-1; 0)$.

- BT 68.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang cân $ABCD$, ($AB \parallel CD$), $AB = 2CD$, $S_{ABCD} = 18$. Biết $AC \perp BD$ tại $I(3;1)$, $BC: x - y + 2 = 0$. Tìm tọa độ A, B, C, D ?
 Đáp số: $A(-1;1)$, $B(3;5)$, $C(5;1)$, $D(3;-1)$ hoặc $A(3;5)$, $B(-1;1)$, $C(3;-1)$, $D(5;1)$.
- BT 69.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang $ABCD$, ($AB \parallel CD$), $S_{\triangle ABC} = 12$, $B(3;3)$, $C(5;-3)$. Gọi I là giao điểm của AC và BD thỏa $IC = 2IB$, $I \in d: 2x + y - 3 = 0$. Tìm A, D ?
 Đáp số: $A(-1;3)$, $D(-3;-3)$ hoặc $A(11;-9)$, $D(\frac{11}{5}; \frac{11}{5})$ và làm tương tự khi $I(-\frac{5}{3}; \frac{19}{3})$.
- BT 70.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang cân $ABCD$, có $CD = 2AB$, $S_{ABCD} = 36$ và phương trình hai đường chéo $AC: x + y - 4 = 0$ và $BD: x - y - 2 = 0$. Tìm A, C ?
 Đáp số: $A(1;3)$, $C(7;-3)$ hoặc $A(5;-1) \Rightarrow C$.
- BT 71.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang cân $ABCD$, có $AD = 3BC$ và hai đường chéo vuông góc với nhau, $BD: x + 2y - 6 = 0$. Tam giác ABD có trực tâm $H(-1;2)$. Tìm D ?
 Đáp số: $D(-4;5)$ hoặc $D(\frac{16}{5}; \frac{7}{5})$.
- BT 72.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang cân $ABCD$, có phương trình $AC: x + y - 4 = 0$ và $BD: x - y + 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang, biết $S_{ABCD} = 36$.
 Hướng dẫn: $AB = 2CD = 4$.
- BT 73.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang vuông $ABCD$ tại A, D , có $CD = 2AB$, $B(8;4)$, $AD: x - y + 2 = 0$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên AC và $M(\frac{82}{13}; \frac{6}{13})$ là trung điểm của HC . Tìm A, C, D ?
 Hướng dẫn: $BM \perp DM \leftarrow DM \perp AN \leftarrow N$ là trực tâm $\triangle AMD$.
- BT 74.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang vuông $ABCD$ tại A, B , có $AD = 2AB = 2BC$, $AD: x - y\sqrt{2} = 0$, $M(1;0)$ là trung điểm của BC . Tìm A ?
 Đáp số: $A(\frac{4-\sqrt{2}}{6}; \frac{2\sqrt{2}-1}{6})$ hoặc $A(\frac{4+\sqrt{2}}{6}; \frac{2\sqrt{2}+1}{6})$. Tìm $D \leftarrow N \leftarrow \overline{DA} = 4\overline{NA}$.
- BT 75.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang vuông $ABCD$ tại A, D , có đáy lớn là CD , đường $AD: 3x - y = 0$, $BD: x - 2y$. Góc tạo bởi hai đường thẳng AB, BC bằng 45° . Viết phương trình đường BC , biết $S_{ABCD} = 25$, $x_B > 0$.
 Đáp số: $BC: 2x + y - 1 = 0$ và làm tương tự nếu $2a + b = 0$.
- BT 76.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang $ABCD$, ($AB \parallel CD$), có $A(3;3)$, $C(5;-3)$ và diện tích tam giác ABC bằng 12. Giao điểm I của hai đường chéo nằm trên $d: 2x + y - 3 = 0$ và có hoành độ dương. Xác định A, D , biết $IC = 2IB$ và $x_A < 0$.
 Đáp số: $A(7;-11)$, $D(4;4)$.
- BT 77.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang vuông $ABCD$ tại A, D , có $BC = 2AB = 2AD$, $M(1;0)$ là trung điểm của BC , $AD: x - y\sqrt{3} + 3 = 0$. Tìm A , biết $CD > AB$.
 Đáp số: $A(\frac{3+2\sqrt{2}}{2}; \frac{2+3\sqrt{3}}{2})$ và làm tương tự khi $b = a\sqrt{3}$.
- BT 78.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang vuông $ABCD$ tại A, B , có $C(2;-5)$, $AD = 3BC$. Điểm $M(-\frac{1}{2}; 0) \in AB$, $N(-3;5) \in AD$. Viết phương trình AB, AD , biết $S_{ABCD} = 75$.
 Đáp số: $AD: x - y + 8 = 0$ hoặc $AD: x - 7y + 38 = 0$.

BT 79. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang cân $ABCD$, ($AB \parallel CD$), có $CD = 2AB$, diện tích bằng 7,5 và điểm $B(-1;2)$, đường $CD: 2x - y - 1 = 0$. Tìm A, C, D ?

Đáp số: $A(0;4)$, $D\left(\frac{5}{2};4\right)$, $C\left(\frac{1}{2};0\right)$ và làm tương tự khi $A(-2;2)$.

BT 80. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang $ABCD$, ($AB \parallel CD$) nội tiếp trong đường tròn tâm $I\left(-\frac{1}{2};1\right)$, biết $A(2;6)$ và $E\left(2;-\frac{3}{2}\right)$ là chân đường phân giác trong \hat{A} của ΔABD . Tìm D .

Đáp số: $D(-6;2)$ hoặc $D\left(\frac{18}{5};-\frac{14}{5}\right)$.

BÀI 6. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN HÌNH THOI

BT 81. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có đường chéo $BD: x + 2y - 7 = 0$ và cạnh $AB: x + 3y - 3 = 0$. Viết phương trình ba cạnh và đường chéo còn lại, biết $A(0;1)$.

Đáp số: $BC: 9x + 13y = 83$, $CD: x + 3y = 17$, $AD: 9x + 13y = 13$, $AC: y = 2x + 1$.

VD 177. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có đỉnh $A(1;5)$ và phương trình một đường chéo là $d: x - 2y + 4 = 0$. Xác định B, C, D , biết cạnh hình thoi có độ dài bằng 5.

Đáp số: $B(-2;1)$, $C(3;1)$, $D(6;5)$ hoặc $B(6;5)$, $C(3;1)$, $D(-2;1)$.

VD 178. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có phương trình hai cạnh và một đường chéo là $AB: 7x - 11y + 83 = 0$, $CD: 7x - 11y - 83 = 0$, $BD: 5x - 3y + 1 = 0$. Tìm A, C ?

Đáp số: $A(-4;5)$, $C(6;-1)$.

VD 179. Cho hình thoi $ABCD$ có $A(1;0)$, $B(3;2)$ và góc $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Tìm tọa độ hai đỉnh C và D ?

Đáp số: $C(-\sqrt{3};\sqrt{3}-1)$, $D(2-\sqrt{3};1+\sqrt{3})$ hoặc $C(\sqrt{3};-\sqrt{3}-1)$, $D(2+\sqrt{3};1-\sqrt{3})$.

VD 180. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có đường chéo $AC: x + y - 1 = 0$, điểm $M(4;9) \in AB$, điểm $N(-5;-2) \in AD$ và $AC = 2\sqrt{2}$. Tìm C ?

Đáp số: $C(3;-2)$ hoặc $C(-1;2)$.

VD 181. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có $A(5;5)$, đường thẳng đi qua trung điểm của BC và CD có phương trình $x + y + 14 = 0$, điểm $E(0;-4)$ nằm trên đường thẳng đi qua D và vuông góc với AB . Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi còn lại.

Đáp số: $B(-7;1)$, $C(-11;-11)$, $D(1;-7)$ hoặc $B(-1;-5)$, $C(-11;-11)$, $D(-5;-1)$.

VD 182. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 60^\circ$, trên cạnh AB, BC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $MB + NB = AB$. Biết điểm $P(\sqrt{3};1)$ thuộc đường thẳng DN và đường phân giác trong của góc \widehat{MDN} có phương trình $d: x - \sqrt{3}y + 6 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh D của hình thoi $ABCD$.

Đáp số: $D(\sqrt{3}-6;1)$ hoặc $D(21+\sqrt{3};3\sqrt{3}+1)$.

VD 183. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có đường chéo $BD: x - y = 0$ và điểm $M(1;\sqrt{3}) \in AB$, điểm $N(-2;-2\sqrt{3}) \in CD$. Tìm các đỉnh hình thoi, biết $AB = AC$.

Đáp số: $A(2-\sqrt{3};1)$, $B(\sqrt{3}-1;\sqrt{3}-1)$, $C(-1;2-\sqrt{3})$, $D(2-2\sqrt{3};2-2\sqrt{3})$ và $a = b(\sqrt{3}-2) \Rightarrow \dots$

VD 184. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$, có tâm $I(2;1)$, $AC = 2BD$. Điểm $M\left(0;\frac{1}{3}\right)$ thuộc đường AB , $N(0;7)$ nằm trên đường thẳng CD . Tìm P , biết rằng $\overrightarrow{BP} = 5\overrightarrow{BI}$ và $y_B > 0$.

Đáp số: $P\left(\frac{54}{5}; \frac{13}{5}\right)$.

VD 185. Cho hình thoi $ABCD$, ngoại tiếp đường tròn $(C): 5(x-5)^2 + 5(y-6)^2 = 32$. Biết rằng hai điểm $M(7;8)$, $N(6;9)$ lần lượt thuộc 2 đường thẳng AC và AB . Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi.

Đáp số: $A\left(\frac{75}{11}; \frac{86}{11}\right)$, $B(15; -4)$, $C\left(\frac{35}{11}; \frac{46}{11}\right)$, $D(-5; 16)$ và tương tự khi $AB: x-3y+21=0$.

VD 186. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có tâm $I(3;3)$, có đường chéo $AC=2BD$, điểm $M\left(2; \frac{4}{3}\right) \in AB$, điểm $N\left(3; \frac{13}{3}\right) \in CD$. Viết phương trình đường chéo BD , biết $x_B > 3$.

Đáp số: $BD: x+y-6=0$.

VD 187. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có các cạnh AB, CD lần lượt có phương trình là $AB: x-2y+5=0$, $CD: x-2y+1=0$ và $M(-3;3) \in AD$, $N(-1;4) \in BC$. Viết phương trình các đường thẳng AD, BC của hình thoi?

Đáp số: $AD: x+2y-3=0$, $BC: x+2y-7=0$ hoặc $AD: 3x-2y+15=0$, $BC: 3x-2y+11=0$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 82. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có cạnh AB và đường chéo BD theo thứ tự đó nằm trên các đường thẳng có phương trình $d_1: x+7y-7=0$ và $d_2: x+2y-7=0$, một đỉnh có tọa độ là $(0;1)$. Viết phương trình các cạnh còn lại.

Đáp số: $AC: y=2x+1$, $BC: y=7-x$, $AD: y=1-x$, $CD: x+7y-37=0$.

BT 83. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có tâm $I(2;1)$ và $AC=2BD$. Tọa độ điểm $M\left(0; \frac{1}{3}\right) \in AB$, điểm $N(0;7) \in CD$. Tìm B , biết $x_B > 0$.

Đáp số: $B(1; -1)$.

BT 84. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có phương trình của một đường chéo là $3x+y-7=0$, điểm $B(0; -3)$, diện tích hình thoi bằng 20. Tìm tọa độ A, C, D .

Đáp số: $A(2;1)$, $B(0; -3)$, $C(4; -5)$ hoặc $A(4; -5)$, $B(0; -3)$, $C(2;1)$.

BT 85. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có tâm $I(1; -2)$ và $AC=2BD$, điểm $M(-5; -4) \in AB$, điểm $N(-5; 16) \in CD$. Tìm B , biết $x \in \mathbb{Z}$.

Đáp số: $B(-2; -8)$.

BT 86. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có đường chéo $BD: y=x-2$, điểm $N(4; -4) \in BC$, $N(-5; 1) \in AB$, $BD=8\sqrt{2}$. Tìm các đỉnh của hình thoi $ABCD$?

Đáp số: $A(1; 3)$, $B(7; 5)$, $C(5; -1)$, $D(-1; -3)$ hoặc $A(13; 7)$, $B(7; 5)$, $C(9; 11)$, $D(15; 13)$.

BT 87. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có cạnh $AB: x+2y-1=0$, đường chéo $AC: 2x+y+1=0$, điểm $M(1; -3) \in BD$, $BD=8\sqrt{10}$. Tìm tọa độ các đỉnh hình thoi?

Đáp số: $A(-1; 1)$, $B(9; 1)$, $C(3; -7)$, $D(-7; -7)$ hoặc $A(-1; 1)$, $B(-7; -7)$, $C(3; -7)$, $D(9; 1)$.

BT 88. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ ngoại tiếp $(C): (x-2)^2 + (y+1)^2 = 8$ và điểm $A \in d: x-2y+3=0$, $x_A > 2$, $BD=2AC$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi.

Đáp số: $\left[A(1; 2), B(8; 1), C(3; -4), D(-4; -3) \right]$ hoặc $\left[A\left(\frac{1}{5}; \frac{8}{5}\right), B(4; 5), C\left(\frac{19}{5}; -\frac{18}{5}\right), D(0; -7) \right]$
 $\left[A(1; 2), B(-4; -3), C(3; -4), D(8; 1) \right]$ hoặc $\left[A\left(\frac{1}{5}; \frac{8}{5}\right), B(0; -7), C\left(\frac{19}{5}; -\frac{18}{5}\right), D(4; 5) \right]$.

BT 89. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có đường chéo $AC: x+7y-31=0$, đỉnh $B \in d_1: x+y-8=0$, đỉnh $D \in d_2: x-2y+3=0$ và $S_{ABCD} = 75$. Tìm A, B, C, D ?

Đáp số: $A(0;3), B(0;8), C(-11;6), D(-1;1)$ hoặc $A(-11;6), B(0;8), C(10;3), D(-1;1)$.

BT 90. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có phương trình cạnh $AB: x+3y+1=0$, đường chéo $BD: y=x+5$, điểm $M(1;2) \in AD$. Tìm tọa độ các đỉnh hình thoi ?

Đáp số: $A(2;-1), B(-4;1), C(-6;7), D(0;5)$.

BT 91. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có cạnh $AB: y=x+2$, đường chéo $BD: y=1-2x$, $M(2;0) \in AD$. Tìm tọa độ các đỉnh hình thoi ?

Đáp số: $A\left(-\frac{29}{6}; -\frac{17}{6}\right), B\left(-\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right), C\left(\frac{179}{30}; \frac{77}{30}\right), D\left(\frac{22}{15}; -\frac{29}{15}\right)$.

Bài 7. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG TRÒN

☆☆☆

VD 188. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(2;1)$ và cắt đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ theo một dây cung AB có độ dài bằng 4 ?

Đáp số: $d: 2x + y - 5 = 0$ hoặc $d: x - 2y = 0$.

VD 189. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(6;2)$ và cắt đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ tại hai điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{10}$.

Đáp số: $d: x - 3y = 0$ hoặc $d: x + 3y - 12 = 0$.

VD 190. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(2;2)$ và cắt đường tròn $(C): (x+1)^2 + (y-1)^2 = 16$ tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $MA = 3MB$.

Đáp số: $d: x + y - 4 = 0$ hoặc $d: 7x - y - 12 = 0$.

VD 191. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(1;-3)$ và cắt đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$ với tâm I tại A, B sao cho $S_{\triangle IAB} = 8$ và cạnh AB là cạnh dài nhất của tam giác IAB ?

Đáp số: $d: y + 3 = 0$ hoặc $d: 4x + 4y + 5 = 0$.

VD 192. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$ và $M(2;2), N(4;)$. Hãy viết phương trình đường thẳng d trong các trường hợp sau:

a) Qua M và cắt đường tròn (C) tại 2 điểm tạo thành tam giác có diện tích lớn nhất.

b) Qua N và cắt đường tròn (C) theo dây cung AB có độ dài nhỏ nhất.

Đáp số: a) $d: x + y - 4 = 0$ hoặc $d: x + 7y - 16 = 0$. b) $d: x - y - 1 = 0$.

VD 193. (A – 2009) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 = 0$ với tâm là I và đường thẳng $d: x + my - 2m + 3 = 0$. Tìm m để đường thẳng d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $S_{\triangle IAB}$ đạt giá trị lớn nhất ?

Đáp số: $m \neq 0$ hoặc $m = \frac{8}{15}$.

VD 194. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2mx + 2y + 10 = 0$ có tâm I . Tìm m để đường thẳng $d: x + y + 1 = 0$ cắt (C) tại A, B sao cho $\triangle IAB$ đều ?

Đáp số: $m = \pm 3\sqrt{3}$.

VD 195. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$. Hãy viết phương trình đường thẳng d cắt (C) tại M, N sao cho $\triangle AMN$ vuông cân tại A , biết $A(1;0)$.

Đáp số: $d: y - 1 = 0$ hoặc $d: y + 3 = 0$.

VD 196. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(2;3)$ và cắt hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 = 13$ và $(C_2): x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$ lần lượt tại M, N sao cho A là trung điểm của MN .

Đáp số: $d: x - 3y + 7 = 0$.

VD 197. Hãy viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(-1;2)$ và cắt hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ và $(C_2): (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$ theo hai dây cung có độ dài bằng nhau?

Đáp số: $d: x + 1 = 0$ hoặc $d: 4x - 7y + 18 = 0$.

VD 198. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $(C): (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$, $(C'): (x-6)^2 + (y-2)^2 = 20$. Gọi A là giao điểm của hai đường tròn có tung độ dương. Hãy viết phương trình đường thẳng d đi qua A và cắt đường tròn (C) , (C') theo hai dây cung phân biệt có độ dài bằng nhau.

Đáp số: $d: x - y + 2 = 0$.

VD 199. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C_1): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ với tâm I_1 và đường tròn $(C_2): x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$ với tâm I_2 . Đường thẳng d song song với hai đường nối tâm của hai đường tròn và cắt đồng thời cả hai đường tròn nói trên. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của I_1, I_2 lên đường d . Viết phương trình đường d , biết $S_{I_1HKI_2} = 10$.

Đáp số: $d: 2x - y - 5 = 0$ hoặc $d: 2x - y + 5 = 0$.

VD 200. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $(C_1): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$, $(C_2): (x+1)^2 + y^2 = 16$ và đường thẳng $d: 2x + 4y - 15 = 0$. Tìm điểm $M \in (C_1)$, $N \in (C_2)$ sao cho MN nhận đường thẳng d làm trung trực và N có hoành độ âm.

Đáp số: $M\left(-\frac{4}{5}; \frac{22}{5}\right)$, $N(-1;4)$.

VD 201. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + (y-1)^2 = 2$. Hãy xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$, biết $B, C \in (C)$ và $A, D \in Ox$, $x_B > x_C$.

Đáp số: $A\left(\frac{29}{20}; 0\right)$, $B\left(\frac{29}{20}; -\frac{2}{5}\right)$, $C\left(\frac{21}{20}; -\frac{2}{5}\right)$, $D\left(\frac{21}{20}; 0\right)$.

VD 202. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ và $d: x + y + 2 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') cắt d tại A, B và cắt (C) tại C, D sao cho $ABCD$ là hình vuông, biết rằng $x_C > x_D$.

Đáp số: $(C'): x^2 + (y+1)^2 = 1$ hoặc $(C'): (x-1)^2 + y^2 = 9$.

VD 203. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy viết phương trình đường tròn (C) có tâm $I \in d: x - y - 1 = 0$ và (C) cắt Ox tại A, B , cắt Oy tại M, N sao cho $S_{\triangle IMN} = S_{\triangle IAB} = 12$.

Đáp số: $\begin{cases} (C): (x-4)^2 + (y-3)^2 = 25 \\ (C): (x+3)^2 + (y+4)^2 = 25 \end{cases}$ hoặc $(C): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2305}{4}$.

VD 204. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$ và điểm $A(1;3)$. Hãy viết phương trình đường tròn (C') đi qua A , đồng thời cắt (C) tại B, C sao cho:

a) $S_{\triangle ABC} = 27$.

b) $d(A;BC)_{\max}$.

Đáp số: $(C): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$.

VD 205. Cho đường tròn $(C): (x+6)^2 + (y-6)^2 = 50$. Hãy viết phương trình đường d tiếp xúc với (C) tại điểm M và cắt Ox tại A , cắt Oy tại B sao cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Đáp số: $d: y = x + 2$ hoặc $d: y = x + 22$ hoặc $d: x - 5y + 10 = 0$ hoặc $d: 7x + 13y + 18 = 0$.

VD 206. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 10$ và điểm $M(-2; -5)$.

Đường tròn tâm M cắt đường tròn (C) theo dây cung $AB = 2\sqrt{5}$. Viết phương trình AB ?

Đáp số: $AB: x + 2y + 2 = 0$ hoặc $AB: 4x + 8y + 3 = 0$.

VD 207. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(1; 2)$ và cắt đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$ theo một dây cung có độ dài bằng 8 ?

Đáp số: $d: y - 2 = 0$ hoặc $d: 3x - 4y + 5 = 0$.

VD 208. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(2; 1)$ và cắt đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ tại A, B sao cho $\overline{MA} = -3\overline{MB}$.

Đáp số: $d: x - 2 = 0$ hoặc $d: y - 1 = 0$.

VD 209. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 = 0$ với tâm là I và đường thẳng $d: x + my - 2m + 3 = 0$. Tìm m để đường thẳng d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho ΔIAB đều ?

Đáp số: $m = \frac{8 \pm \sqrt{93}}{29}$.

VD 210. (B – 2009) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-2)^2 + y^2 = \frac{4}{5}$ và hai đường thẳng $\Delta_1: x - y = 0$, $\Delta_2: x - 7y = 0$. Xác định tọa độ tâm K và bán kính của đường tròn (C') , biết đường tròn (C') tiếp xúc với Δ_1, Δ_2 và tâm K thuộc đường tròn (C) .

Đáp số: $K\left(\frac{8}{5}; \frac{4}{5}\right)$, $R = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

VD 211. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 12x - 4y + 36 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C_1) tiếp xúc với hai trục tọa độ Ox và Oy đồng thời tiếp xúc ngoài với đường tròn (C) .

Đáp số: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$; $(x-18)^2 + (y-18)^2 = 18$; $(x-6)^2 + (y+6)^2 = 36$.

VD 212. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') có tâm $M(5; 1)$ biết (C') cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = \sqrt{3}$.

Đáp số: $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 13$ hoặc $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 43$.

VD 213. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $d_1: \sqrt{3}x + y = 0$ và $d_2: \sqrt{3}x - y = 0$. Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A , cắt d_2 tại hai điểm B và C sao cho tam giác ABC vuông tại B . Viết phương trình của (T) , biết ΔABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

Đáp số: $(T): \left(x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 1$.

VD 214. Cho $(C_1): x^2 + y^2 = 4$, $(C_2): x^2 + y^2 - 12x + 18 = 0$ và đường thẳng $d: x - y - 4 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc (C_2) , tiếp xúc với d và cắt (C_1) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho AB vuông góc với d .

Đáp số: $(C): x^2 + y^2 - 6x - 6y + 10 = 0$.

VD 215. Cho các đường tròn $(C_1): (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ và $(C_2): (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$. Viết phương trình đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C_1) và cắt đường tròn (C_2) tại M, N để $MN = 2\sqrt{2}$.

Đáp số: $\begin{cases} MN: x + y - 2 = 0 \\ MN: x + 7y - 6 = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} MN: x - y - 2 = 0 \\ MN: 7x - y - 2 = 0 \end{cases}$.