# "قوانين الهندسة التحليلية"

● لأي نقطتين أ $(س_1 ، ص_1)$ ، ب $(س_2 ، ص_2)$

① البعد بين نقطتين : طول $\overline{أب} = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

② منتصف قطعة مستقيمة :

منتصف $\overline{أب} = \left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2}\right)$

③ ميل الخط المستقيم :

ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

---

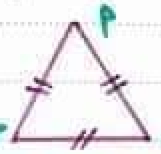
## 1 المثلث :

محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع

(أ) لإثبات أن النقط أ ، ب ، ج تمثل رؤوس مثلث يمكن إيجاد أب ، ب ج ، أ ج ثم إثبات أن (مجموع طولي أصغر ضلعين) > (طول الضلع الثالث)

(ب) لإثبات أن △ أ ب ج متساوي الأضلاع





اثبت أن : أب = ب ج = أ ج

● وإذا كان في △ "ضلعين متساويين فقط" كان △ متساوي الساقين.

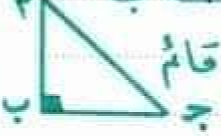
(ج) لتعيين نوع المثلث أ ب ج حسب زواياه حيث $\overline{أج}$ أطول الأضلاع :

نقارن بين $(أج)^2$ ، $(أب)^2 + (ب ج)^2$ كما يلي :



① إذا كان : $(أج)^2 > (أب)^2 + (ب ج)^2$

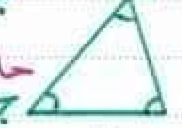
فإن △ أ ب ج منفرج الزاوية في ب





② إذا كان : $(أج)^2 = (أب)^2 + (ب ج)^2$

فإن △ أ ب ج قائم الزاوية في ب





③ إذا كان : $(أج)^2 < (أب)^2 + (ب ج)^2$

فإن △ أ ب ج حاد الزوايا .

● كل ما سبق عن المثلث يمكن إثباته : بقانون البعد بين نقطتين

(د) لإثبات أن المثلث أ ب ج قائم الزاوية في ب (بقانون الميل) :



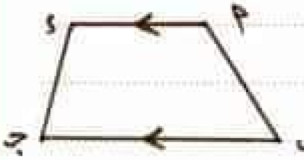
نأتي بميل $\overleftrightarrow{أب}$ ، ميل $\overleftrightarrow{ب ج}$

إذا كان : ميل $\overleftrightarrow{أب}$ × ميل $\overleftrightarrow{ب ج} = -1$

∴ $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{ب ج}$ ∴ المثلث قائم في ب

## ٢ شبه المنحرف : مساحة شبه المنحرف = (مجموع القاعدتين ÷ ٢) × الارتفاع

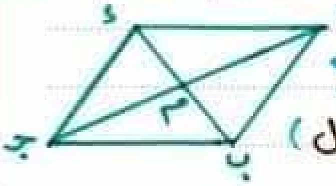
• لإثبات أن الشكل أ ب جـ د شبه منحرف نثبت أن :
"ضلعين متقابلين فيه متوازيان والضلعان الآخران غير متوازيين"



إذا كان : ميل أد = ميل ب جـ ∴ أد // ب جـ
، ميل أب ≠ ميل د جـ ∴ أب ، د جـ غير متوازيين
∴ الشكل أ ب جـ د شبه منحرف
(باستخدام قانون الميل)

## ٣ متوازي الأضلاع : مساحته = طول القاعدة × الارتفاع (المتعلق بالقاعدة)

• لإثبات أن الشكل الرباعي متوازي أضلاع نثبت إحدى الخواص الآتية :



(١) كل ضلعين متقابلين متوازيان :
أي أن : ميل أد = ميل ب جـ ، ميل أب = ميل د جـ
∴ أد // ب جـ ، أب // د جـ (باستخدام قانون الميل)

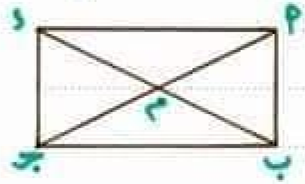
(٢) كل ضلعين متقابلين متساويان في الطول :
أي أن : أ د = ب جـ ، أ ب = د جـ (باستخدام قانون البعد)

(٣) ضلعان متقابلان متوازيان ومتساويان في الطول :
ميل أد = ميل ب جـ ، أ د = ب جـ أو ميل أب = ميل د جـ ، أ ب = د جـ

(٤) القطران ينصف كل منهما الآخر. (باستخدام قانون المنتصف)
أي أن : نقطة منتصف أجـ = نقطة منتصف ب د = م

• لإثبات أن الشكل مستطيل أو معين أو مربع فإننا :
نثبت أولاً أن هذا الشكل متوازي أضلاع كما سبق ثم :

## ٤ لإثبات أن متوازي الأضلاع مستطيل نثبت إحدى الخاصيتين :



(أ) ضلعان متجاوران فيه متعامدان
أي : ميل أب × ميل ب جـ = -١ ∴ أب ⊥ ب جـ
أو ميل جـ د × ميل ب جـ = -١ ∴ جـ د ⊥ ب جـ
وهكذا......

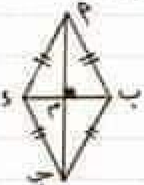
(ب) القطران متساويان في الطول أي : أ جـ = ب د

• تذكر أن : محيط المستطيل = (الطول + العرض) × ٢
مساحة المستطيل = الطول × العرض

⑤ المعين: (نثبت أولاً أن الشكل متوازي أضلاع) ثم نثبت إحدى الآتي:

(أ) ضلعان متجاوران فيه متساويان في الطول.

أي: أب = ب ج أو أ د = د ج وهكذا...




(ب) القطران متعامدان.

أي: ميل أج × ميل ب د = -١ ∴ أج ⊥ ب د

• تذكر أن: محيط المعين = طول الضلع × ٤

مساحة المعين = ½ × حاصل ضرب القطرين

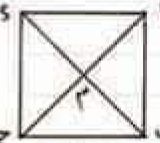
(أو) = طول الضلع × الارتفاع

---

⑥ المربع: (نثبت أولاً أن الشكل متوازي أضلاع) ثم نثبت إحدى الآتي:

(أ) ضلعان متجاوران فيه متعامدان ومتساويان في الطول.

أي: ميل أب × ميل ب ج = -١ ∴ أب ⊥ ب ج ، (أب = ب ج)




(ب) ضلعان متجاوران فيه متعامدان، والقطران متعامدان

أي: ميل أب × ميل ب ج = -١ ∴ أب ⊥ ب ج

و ← ميل أج × ميل ب د = -١ ∴ أج ⊥ ب د

(ج) القطران متساويان في الطول ومتعامدان.

أي: أج = ب د ، ميل ب د × ميل أج = -١ ∴ أج ⊥ ب د

(د) ضلعان متجاوران متساويان في الطول وقطراه متساويان في الطول.

أي: أب = ب ج ، أج = ب د

• تذكر أن: محيط المربع = طول الضلع × ٤

مساحة المربع = طول الضلع × نفسه

---

* لإثبات أن النقطة ج تقع على محور تماثل أب نثبت أن: ج أ = ج ب

* لإثبات أن أ، ب، ج على استقامة واحدة نثبت أن: ميل أب = ميل ب ج

أو نوجد طول أب، ب ج، أ ج نثبت أن: أكبر بعد = مجموع البعدين الآخرين

* لإثبات أن ثلاث نقط مثل أ، ب، ج تقع على دائرة واحدة مركزها م نثبت أن: م أ = م ب = م ج = نق


• تذكر أن: محيط الدائرة = ٢ ط نق

مساحة الدائرة = ط نق²

## • كيفية إيجاد ميل الخط المستقيم:

١- إذا علمت نقطتان على المستقيم: $أ(س_١، ص_١)$، $ب(س_٢، ص_٢)$

$$\therefore م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

٢- إذا علم قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وليكن هـ $\therefore$ م = ظا هـ

٣- إذا علمت معادلة الخط المستقيم على الصورة،

ص = ب س + جـ $\therefore$ م = ب ← (معامل س)

٤- إذا علمت معادلة الخط المستقيم على الصورة:

أ س + ب ص + حـ = ٠ $\therefore$ م = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-أ}{ب}$

٥- إذا علم ميل الخط المستقيم الموازي له وليكن $م_١$

$\therefore$ م = $م_١$ لأن، الميلين يكونان متساويان

٦- إذا علم ميل الخط المستقيم العمودي عليه وليكن $م_٢$

$\therefore$ م = $\frac{-١}{م_٢}$ لأن: م × $م_٢$ = -١

---

## ملاحظات هامة:

١- معادلة المستقيم الذي يمر بنقطة الأصل (٠، ٠) هي: ص = م س ← الميل

٢- معادلة محور السينات هي: ص = ٠

ومعادلة محور الصادات هي: س = ٠

٣- معادلة المستقيم الموازي لمحور السينات ويقطع محور الصادات في النقطة (٠، جـ) هي: ص = جـ

٤- معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات ويقطع محور السينات في النقطة (أ، ٠) هي: س = أ

---

مع خالص تمنياتي بالتوفيق والنجاح

"قوانين الهندسة كاملة"

١- سطحا متوازى الاضلاع المشتركين في قاعدة واحدة ومحصورين بين ضلعين متوازيين ← متساويين في المساحة.

٢- مساحة متوازى الاضلاع تساوى مساحة المستطيل المشترك معه في قاعدة واحدة ومحصور معه بين ضلعين متوازيين.

٣- مساحة المتوازى = طول القاعدة × الارتفاع المناظر.

٤- متوازيات الاضلاع المحصورة بين مستقيمين متوازيين ومشتركين في قاعدة واحدة تكون مساحتهم متساوية.

٥- مساحة المثلث تساوى $\frac{1}{2}$ مساحة متوازى الاضلاع المشترك معه في قاعدة واحدة ومحصورين بين ضلعين متوازيين.

٦- مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع المناظر

ROCKAL

٧- المثلثان المرسومان على قاعدة واحدة ورأسهما على مستقيم يوازي هذه القاعدة متساويين في المساحة.

٨- المثلثات التي قواعدها متساوية في الطول والمحصورة بين مستقيمين متوازيين تكون متساوية في المساحة

٩- متوسط المثلث يقسمه إلى مثلثين متساويين في المساحة

١٠- المثلثات التي أطوال قواعدها متساوية وعلى مستقيم واحد ومشتركة في الرأس مساحتها متساوية

١١- المثلثان المتساويان في المساحة والمرسومان على قاعدة واحدة يكون رأسهما على مستقيم يوازي القاعدة

١٢- المعين: هو متوازي أضلاع أضلاعه متساوية.

١٣- مساحة المعين = طول الضلع × الارتفاع
= $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب القطرين

١٤- محيط المعين = طول الضلع × ٤ ، = ٤ل

ROCKAL

١٥- مساحة المربع = $\frac{1}{2}$ مربع طول قطره .

١٦- المربع : هو معين قطراه متساويان في الطول

١٧- شبه المنحرف : هو شكل رباعي به ضلعان متوازيان .
- الضلعان المتوازيان يسمان بقاعدة شبه المنحرف
- الضلعين غير المتوازيان يسمان بساق شبه المنحرف

١٨- شبه المنحرف متساوي الساقين : هو شبه منحرف ساقاه متساويان في الطول .

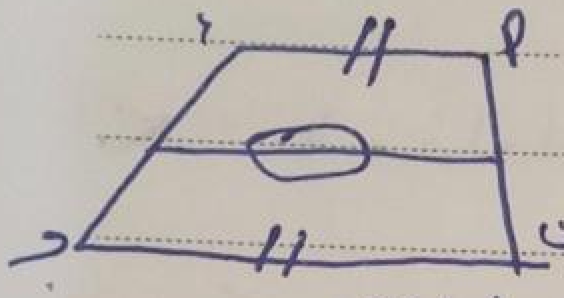
١٩- زاويتا كل من قاعدتي شبه المنحرف متساوي الساقين متساويان في القياس .

٢٠- قطرا شبه المنحرف متساوي الساقين متساويان في الطول

٢١- شبه المنحرف متساوي الساقين له محور تماثل واحد فقط ينصف قاعدتيه

٢٢- القاعدة المتوسطة لشبه المنحرف : هي القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفي ساقيه

٢٣ـ القاعدة المتوسطة لشبه المنحرف: تساوي نصف مجموع طولي قاعدتي المتوازيين




٢٤ـ طول القاعدة المتوسطة: $\frac{\text{أد} + \text{بج}}{٢}$

٢٥ـ مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ مجموع طولي القاعدتين المتوازيتين × الارتفاع.

٢٦ـ مساحة شبه المنحرف = طول القاعدة المتوسطة × الارتفاع

٢٧ـ "شروط تشابه المضلعين"

١ـ زواياهما المتناظرة متساوية في القياس

٢ـ أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة

٢٨ـ أكبر من واحد صحيح ← تكبير

أصغر " " ← تصغير

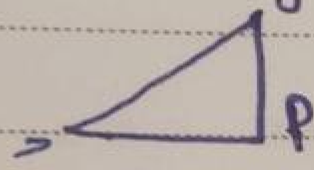
تساوي ١ ← تطابق

٢٩ـ كل المضلعات المنتظمة التي لها نفس عدد الاضلاع وتكون متشابهة

٣٠ـ المضلعات المشابهان لثالث متشابهان

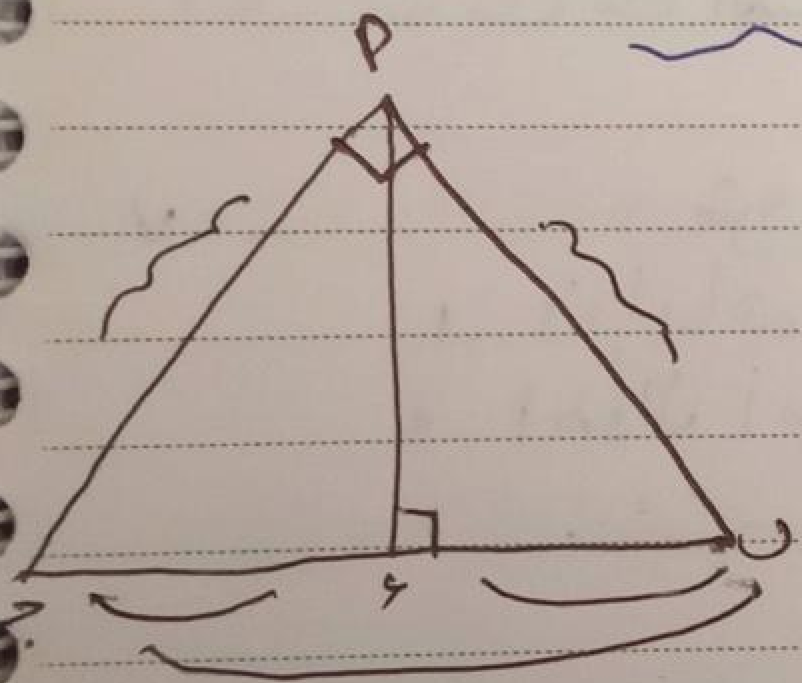
٣١ـ عكس فيثاغورث ؛ إذا كان المثلث ا ب حـ قائم في (أ)

إذن $(\text{ب حـ})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{أ حـ})^2$




٣٢ـ طول مسقط قطعة مستقيمة معلومة على مستقيم معلوم ≤ طول القطعة نفسها

٣٣ـ "نظرية اقليدس"




١ـ $(\text{أب})^2 = \text{ب د} \times \text{ب حـ}$

٢ـ $(\text{أحـ})^2 = \text{حـ د} \times \text{حـ ب}$

٣ـ $(\text{أد})^2 = \text{ب د} \times \text{د حـ}$

٤ـ $\text{أد} = \dfrac{\text{أب} \times \text{أحـ}}{\text{ب حـ}}$

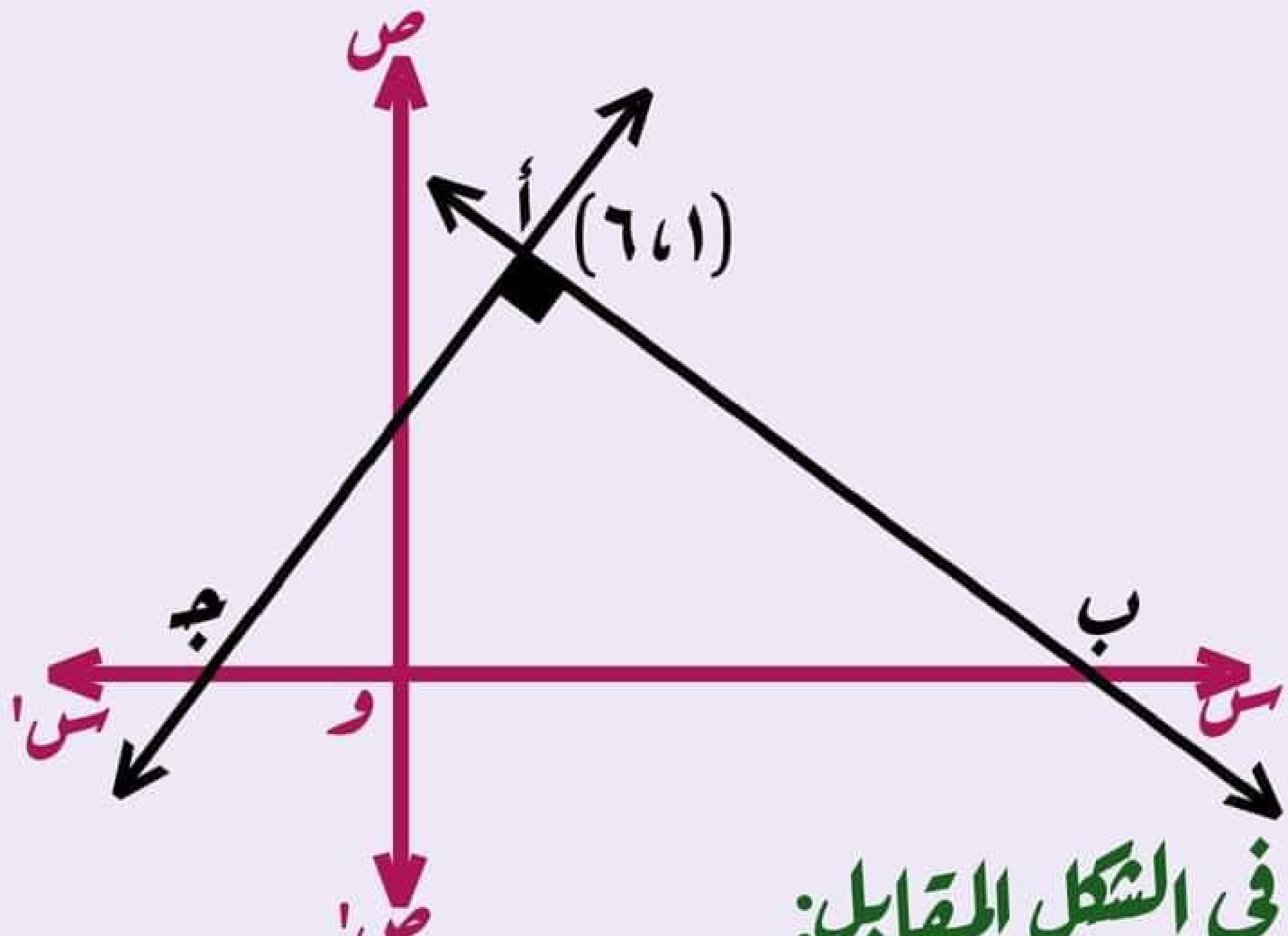
ROCKAL

"التعرف على نوع المثلث حسب زواياه"

١ـ إذا كان مربع طول الضلع الأكبر = مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين فإن المثلث "قائم الزاوية"

٢ـ إذا كان ،، ،، ،، ،، أكبر ( > ) ،، ،، ،، ،،
فإن المثلث "منفرج الزاوية"

٣ـ إذا كان ،، ،، ،، أصغر ( < ) ،، ،، ،، ،،
فإن المثلث "حاد الزوايا"




في الشكل المقابل:

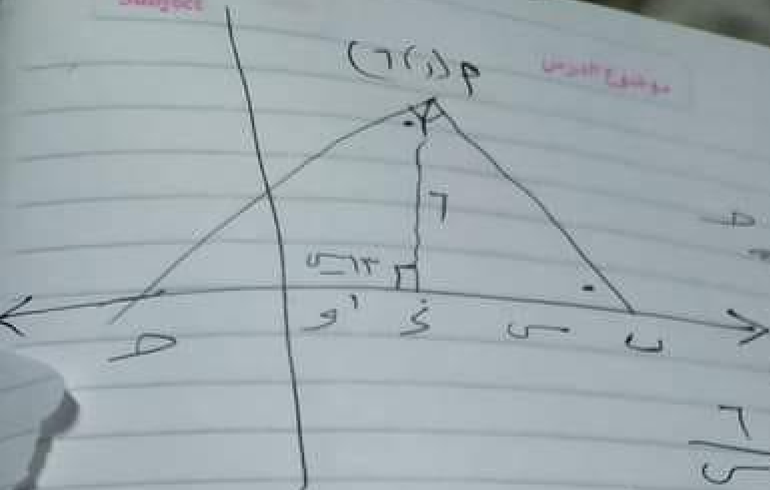
$\overleftrightarrow{\text{أب}} \perp \overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ ، أ(١، ٦) ؛ فإذا كان: ب جـ = ١٣ وحدة طول بحيث أن: و ب > و جـ فأوجد:

(١) مساحة سطح $\Delta$ أ ب جـ

(٢) معادلة $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$

تحياتي:

محمود عبد العزيز




و ب > و هـ

الحل

ظا (هـ م̂ ء) = ظا ب

$\frac{١٣ - س}{٦} = \frac{٦}{س}$

١٣ س − س² = ٣٦

س² − ١٣ س + ٣٦ = ٠

(س − ٤)(س − ٩) = ٠

س = ٤      س = ٩

مرفوض

∴ ب و = ٩ + ١ = ١٠      م(١،٦)

و هـ = −٣      هـ(−٣،٠)

ميل م هـ $= \frac{٦ - ٠}{١ + ٣} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

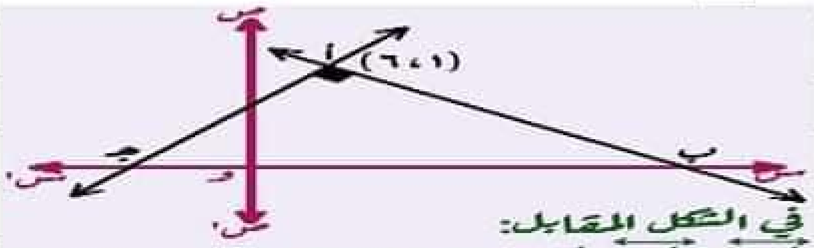
معادلة م هـ: ص $= \frac{٣}{٢}$ س + جـ ← (١،٦)

٦ $= \frac{٣}{٢}$ + جـ

جـ $= ٦ - \frac{٣}{٢} = \frac{٩}{٢}$

ص $= \frac{٣}{٢}$ س $+ \frac{٩}{٢}$

ض




في الشكل المقابل:

أب ⊥ أجـ ، أ(١ ، ٦) ؛ فإذا كانت: ب جـ = ١٣

وحدة طول بحيث أن: و ب > و جـ فأوجد:

(١) مساحة سطح △ أ ب جـ

(٢) معادلة أجـ

تحياتي:

محمود عبدالعزيز

من اقليدس اب × أ ج = أ د × ب ج

وبنات أن ا د = ٦ وب ج = ١٣

اذن مساحة المثلث أ ب ج = ½ × ٦ × ١٣ = ٣٩ سم٢

نفرض و ج = ك ، و د = ١ ، د ب = ١٢ - ك من اقليدس

ا د)٢ = ب د × د ج

٣٦ = ( ١٢ - ك)(١ + ك )

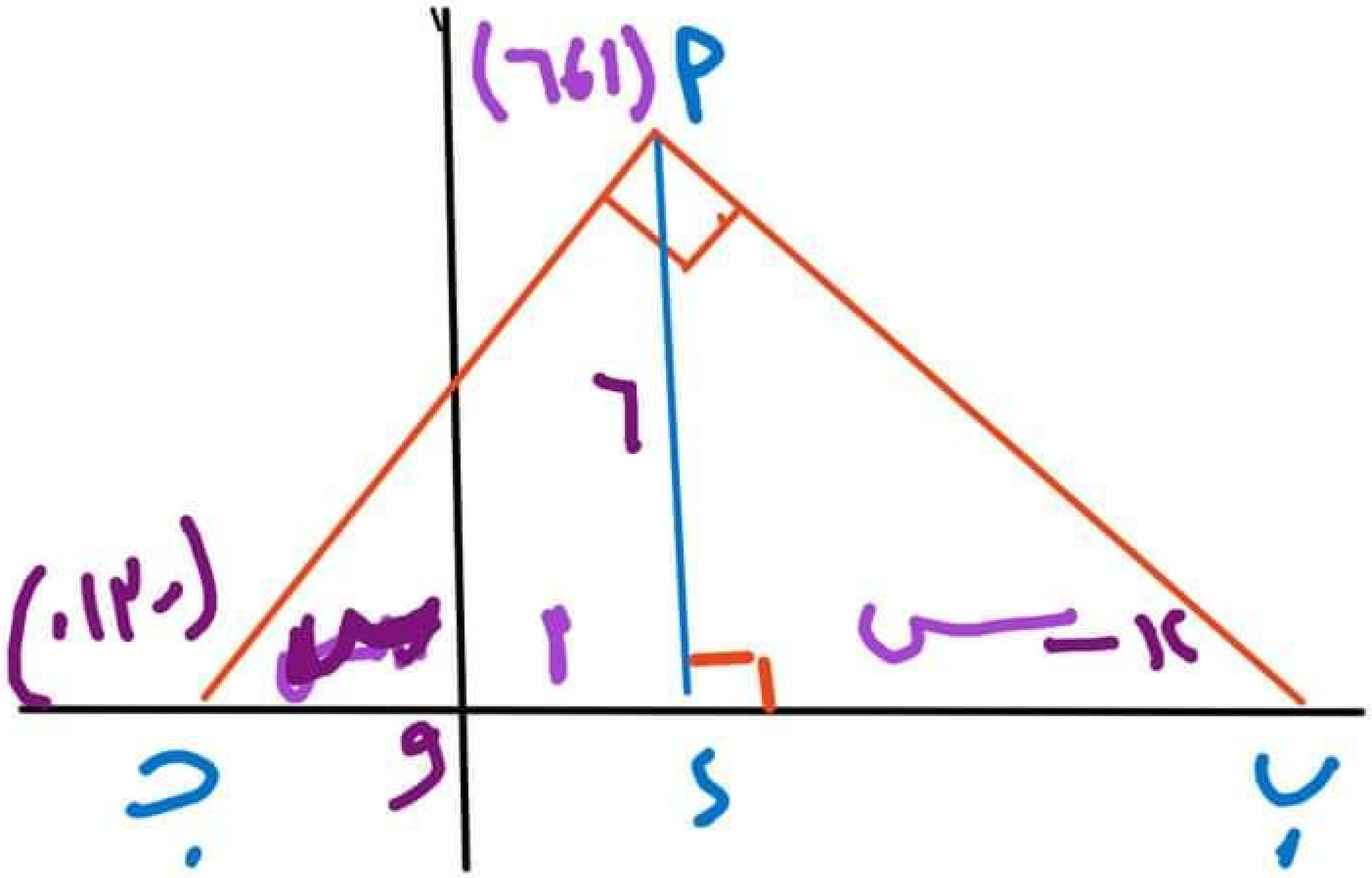
وبالفك والتحليل

ك = ٣ اى أن ج = ( - ٣ ، ٠ )

وبما أن أ = ( ١ ، ٦ ) فإن ميله = ٦/ ٤ = ٣ / ٢

أى أن المعادلة ص = ٣/ ٢ س + ن حيث ن الجزء المقطوع والتعويض بنقطة أ فإن ن = ٩/ ٢

أى المعادلة ص = ٣/ ٢ س + ٩/ ٢




① مساحة $\Delta$ = $\frac{1}{2} \times 6 \times 12 = 36$

② ∵ $|اد|^2 = |بد| \times |دجـ|$

$(6)^2 = (12 - س)(س + 1)$

$س^2 - 11س + 24 = 0$

$(س - 3)(س - 8) = 0 \Leftarrow \boxed{س = 3}$

$س = 8$ مرفوضة لأن $|بد| > |وجـ|$

⇐ إحداثي جـ = $(-3، 0)$

⇐ معادلة $\overleftrightarrow{اجـ}$ :

$\frac{ص - 0}{س + 3} = \frac{6 - 0}{1 + 3} = \frac{3}{2}$

⇐ $ص = \frac{3}{2}(س + 3) = \frac{3}{2}س + \frac{9}{2}$