Les équations différentielles

Equations différentielles du premier ordre avec second membre

Ce cours porte exclusivement sur la résolution des équations différentielles du premier ordre avec second membre.

1 L'idée générale

Une équation différentielle est une équation qui relie une fonction à une ou plusieurs de ses dérivées.
Résoudre une équation différentielle consiste à déterminer toutes les fonctions qui vérifient l'équation différentielle sur un intervalle à définir.
Pour simplifier l'écriture, on remplace couramment dans la formulation d'une équation différentielle la fonction générique $f(x)$ par y.

2 La théorie

2.1 La résolution

$\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}_\star$, résoudre l'équation différentielle du premier ordre, à coefficients constants et avec second membre $y' - ay = b$ revient à déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que $\forall x$, $f'(x) - af(x) = b$.
Une de ces fonctions est appelée une solution de l'équation différentielle.

2.2 La solution

$\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}_\star$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle du premier ordre, à coefficients constants et avec second membre $y' - ay = b$ est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \xi e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ où ξ est une constante réelle.

3 Exercices pratiques

3.1 Exercice 1

Résoudre l'équation différentielle :

$$y' - 2y = 1$$

.

Il s'agit de résoudre une équation différentielle (car reliant y à sa dérivée y') du premier ordre (car seule la dérivée première y' de y est impliquée), à coefficients constants (car les coefficients de y' et de y sont constants) et avec second membre (car $y' - 2y = 1$).

Résoudre une telle équation différentielle revient à déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que $\forall x,\ f'(x) - 2f(x) = 1$.

Par définition, l'ensemble des solutions d'une telle équation différentielle est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \xi e^{2x} - \dfrac{1}{2}$, où ξ est une constante réelle.

3.2 Exercice 2

Résoudre le système différentiel :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' + 3y & = & -4 \\ y(0) & = & -1 \end{array}\right.$$

.

Il s'agit de résoudre une équation différentielle (car reliant y à sa dérivée y') du premier ordre (car seule la dérivée première y' de y est impliquée), à coefficients constants (car les coefficients de y' et de y sont constants) et avec second membre (car $y' + 3y = -4$).

Résoudre une telle équation différentielle revient à déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que $\forall x,\ f'(x) + 3f(x) = -4$.

Par définition, l'ensemble des solutions d'une telle équation différentielle est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \xi e^{-3x} - \frac{4}{3}$, où ξ est une constante réelle.

La constante réelle ξ peut être déterminée au moyen de la seconde équation. En effet, toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \xi e^{-3x} - \frac{4}{3}$ doivent aussi vérifier la condition $y(0) = -1$, ce qui signifie que :

$$\xi e^{-3\times 0} - \frac{4}{3} = -1$$

$$\xi - \frac{4}{3} = -1$$

$$\xi = -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

L'ensemble des solutions du système différentiel considéré se réduit donc à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}e^{-3x} - \frac{4}{3}$.

3.3 Exercice 3

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} y' + 5y &= 1 \\ y(1) &= 0 \end{cases}$$

.

Il s'agit de résoudre une équation différentielle (car reliant y à sa dérivée y') du premier ordre (car seule la dérivée première y' de y est impliquée), à coefficients constants (car les coefficients de y' et de y sont constants) et avec second membre (car $y' + 5y = 1$).

Résoudre une telle équation différentielle revient à déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que $\forall x,\ f'(x) + 5f(x) = 1$.

Par définition, l'ensemble des solutions d'une telle équation différentielle est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \xi e^{-5x} + \frac{1}{5}$, où ξ est une constante réelle.

La constante réelle ξ peut être déterminée au moyen de la seconde équation. En effet, toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \xi e^{-5x} + \frac{1}{5}$ doivent aussi vérifier la condition $y(1) = 0$, ce qui signifie que :

$$\xi e^{-5\times 1} + \frac{1}{5} = 0$$
$$\xi e^{-5} + \frac{1}{5} = 0$$
$$\xi = -\frac{1}{5}e^{5}$$

L'ensemble des solutions du système différentiel considéré se réduit donc à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{5}e^{5(1-x)} + \frac{1}{5}$.

3.4 Exercice 4

Résoudre le système différentiel :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2y' + y & = & 3 \\ y'(0) & = & 1 \end{array} \right.$$

.

Il s'agit de résoudre une équation différentielle (car reliant y à sa dérivée y') du premier ordre (car seule la dérivée première y' de y est impliquée), à coefficients constants (car les coefficients de y' et de y sont constants) et avec second membre (car $2y' + y = 3$).

Résoudre une telle équation différentielle revient à déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que $\forall x,\ f'(x) + \frac{1}{2}f(x) = \frac{3}{2}$.

Par définition, l'ensemble des solutions d'une telle équation différentielle est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \xi e^{-\frac{1}{2}x} + 3$, où ξ est une constante réelle.

La constante réelle ξ peut être déterminée au moyen de la seconde équation. En effet, toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \xi e^{-\frac{1}{2}x} + 3$ doivent aussi vérifier la condition $y'(0) = 1$, ce qui signifie que :

$$-\frac{1}{2}\xi e^{-\frac{1}{2}\times 0} = 1$$
$$-\frac{1}{2}\xi = 1$$
$$\xi = -2$$

L'ensemble des solutions du système différentiel considéré se réduit donc à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2e^{-\frac{1}{2}x} + 3$.