

**ELABORACION DE NOTAS DE CLASE DE LA ASIGNATURA ANALISIS DE  
ESTRUCTURAS II**

**Jorge Eliécer Escobar Florez**



**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**

**Escuela de Ingeniería civil**

**Bucaramanga**

**2007**

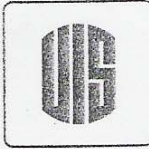
**ELABORACION DE NOTAS DE CLASE DE LA ASIGNATURA ANALISIS DE  
ESTRUCTURAS II**

**Jorge Eliécer Escobar Florez**

**Trabajo de grado para optar por el título de  
Ingeniero civil**

**Director:  
Dalton Moreno Girardot  
ing. Civil MSc.**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
Escuela de Ingeniería civil  
Bucaramanga  
2007**



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

NOTA DE PROYECTO DE GRADO

<b>NOMBRE DEL ESTUDIANTE</b> JORGE ELIECER ESCOBAR FLÓREZ		<b>CÓDIGO</b> 2012876
<b>TÍTULO DE PROYECTO</b>  ELABORACIÓN DE NOTAS DE CLASE DE LA ASIGNATURA ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS II		
<b>REGISTRO NO.</b>	<b>FACULTAD</b> INGENIERIAS FISICOMECAÑICAS	<b>CARRERA</b> INGENIERIA CIVIL
<b>CALIFICACIÓN</b> APROBADO		

**DIRECTOR DEL PROYECTO:**

<b>NOMBRE</b> DALTON MORENO GIRARDOT	<b>FIRMA</b> 
---	------------------

**CALIFICADORES:**

<b>F</b>  <b>N GUSTAVO CHIO CHO</b>	<b>F</b>  <b>N RICARDO A CRUZ HERNÁNDEZ</b>	<b>FECHA</b>		
		<b>AÑO</b> 2007	<b>MES</b> 02	<b>DÍA</b> 26



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

NOTA DE PROYECTO DE GRADO

<b>NOMBRE DEL ESTUDIANTE</b> JORGE ELIECER ESCOBAR FLÓREZ		<b>CÓDIGO</b> 2012876
<b>TÍTULO DE PROYECTO</b> ELABORACIÓN DE NOTAS DE CLASE DE LA ASIGNATURA ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS II",		
<b>REGISTRO NO.</b>	<b>FACULTAD</b> INGENIERIAS FISICOMECAÑICAS	<b>CARRERA</b> INGENIERIA CIVIL
<b>CALIFICACIÓN</b> 4.4 (CUATRO COMA CUATRO)		

**DIRECTOR DEL PROYECTO:**

<b>NOMBRE</b> DALTON MORENO GIRARDOT	<b>FIRMA</b> 
---	------------------

**CALIFICADORES:**

<b>F</b>  <b>N GUSTAVO CHIO CHO</b>	<b>F</b>  <b>N RICARDO A. CRUZ HERNÁNDEZ</b>	<b>FECHA</b>		
		<b>AÑO</b> 2007	<b>MES</b> 02	<b>DÍA</b> 26

*A Dios por su infinita Bondad.  
A mis padres, por ser un modelo  
y un ejemplo de vida, por su apoyo,  
comprensión y amor incondicional.  
A mis familiares por acompañarme a lo largo del camino.  
A mis amigos por hacer de este proceso universitario  
una experiencia grandiosa e inolvidable.  
A Adrián y a Luís Alberto por su apoyo  
incondicional e invaluable en los momentos cruciales  
de mi proyecto.  
A Ana Leonor por su compañía, apoyo y consejos  
en cada momento de este proyecto.  
A todas las personas que de alguna u otra manera  
Me han ayudado en la consecución de este logro.*

**Jorge Escobar**

## **AGRADECIMIENTOS**

Quisiera agradecer de manera especial:

A *Daton Moreno Girardot*, Ingeniero Civil, director del proyecto y amigo, por su respaldo, confianza y colaboración oportuna.

A la *Escuela de Ingeniería Civil*, por brindarme las bases necesarias para enfrentarme al nuevo reto, la vida profesional.

A todas y cada una de las personas que me brindaron su apoyo, su cariño y su comprensión en las diferentes etapas de mi vida.

A *mi familia*, por ser la fuente principal de motivación durante todos estos años para alcanzar mis sueños.

## TABLA DE CONTENIDO

<b>INTRODUCCION.....</b>	<b>1</b>
<b>OBJETIVOS .....</b>	<b>3</b>
<b>1. MÉTODO DE LA VIGA CONJUGADA.....</b>	<b>4</b>
1.1 INTRODUCCIÓN.....	4
1.2 CONCEPTOS PREVIOS .....	5
1.2.1 Principio de Superposición .....	5
1.3 MARCO TEÓRICO .....	5
1.4 CONDICIONES DE APOYO DE LA VIGA CONJUGADA .....	12
1.4.1 Apoyo simple en la viga real.....	12
1.4.2 <i>Apoyo empotrado en la viga real</i> .....	13
1.4.3 <i>Voladizo en la viga real</i> .....	13
1.5 EJERCICIOS DE APLICACIÓN.....	14
<b>2. “SLOPE – DEFLECTION” .....</b>	<b>34</b>
2.1 Introducción .....	34
2.2 SUPOSICIONES BÁSICAS DEL MÉTODO:.....	35
2.2.1 Convenciones:.....	35
2.3 DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES DEL SLOPE-DEFLECTION: .....	35
2.3.1 Momentos de empotramiento .....	38
2.3.2 Momentos generados por desplazamientos .....	41
2.4 PLANTEAMIENTO GENERAL DEL MÉTODO DEL SLOPE-DEFLECTION:.....	53
2.4.1 <i>Aplicación del Slope Deflection en Vigas</i> .....	53
2.4.2 Aplicación de Slope Deflection en el análisis de pórticos.....	74
2.5 EJERCICIOS PROPUESTOS:.....	105

<b>3.</b>	<b>MÉTODO DE CROSS .....</b>	<b>107</b>
3.1	INTRODUCCIÓN.....	107
3.2	LIMITACIÓN .....	108
3.2.1.	Conceptos previos .....	108
3.3	DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS EN UN NODO .....	110
3.3.1	Factor de distribución ( $\mu_{ij}$ ).....	115
3.3.2	Transmisión de momentos entre extremos.....	116
3.4.	PROPIEDADES DE LOS APOYOS.....	117
3.5	PRINCIPIOS BÁSICOS DEL MÉTODO DE LA DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS DE CROSS .....	119
3.6.1	Análisis de vigas continuas sin desplazamiento relativo entre nodos.....	124
3.7	ANÁLISIS DE PÓRTICOS SIN DESPLAZAMIENTO RELATIVO ENTRE NODOS.....	128
3.8	SIMPLIFICACIONES PARA EL MÉTODO DE CROSS.....	132
3.8.1	Simplificación por extremo Articulado .....	132
3.8.2	Simplificación por simetría .....	142
<b>4</b>	<b>MÉTODO DE KANI.....</b>	<b>155</b>
4.1	CONCEPTOS PREVIOS: .....	155
4.1.1	Suposiciones básicas del método.....	155
4.1.2	Momentos de empotramiento .....	155
4.1.3	Nodo Rígido .....	155
4.2	CASO DE ESTRUCTURA SIN DESPLAZAMIENTO .....	155
4.2.1	Ecuación para el cálculo de los momentos flectores en los extremo de una barra i-j sin desplazamiento entre nodos. ....	156
4.2.2	Distribución de momentos en un Nodo .....	158
4.2.3	Propiedades de los apoyos .....	162
4.2.4	Simplificaciones en el Método de Kani. ....	164
4.2.5	Procedimiento para solucionar estructuras sin desplazamiento relativo entre nodos mediante el método de Kani.....	164



4.2.6	Ejercicios de Aplicación .....	166
4.3	PÓRTICOS DE VARIOS PISOS CON DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES EN LOS NODOS: CARGAS HORIZONTALES APLICADAS ÚNICAMENTE EN LOS NODOS.....	183
4.3.1	Ecuación para el cálculo de los momentos flectores en los extremo de una barra i-j con desplazamiento entre nodos. ....	183
4.3.2	Distribución de momentos en los Nodos debido a los efectos de rotación y desplazamiento relativo entre nodos:.....	184
4.3.3	Procedimiento de análisis para pórticos con desplazamiento horizontal por el método de Kani .....	193
<b>5</b>	<b>IDEALIZACIÓN Y ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS.....</b>	<b>229</b>
5.1	IDEALIZACIÓN ESTRUCTURAL.....	229
5.2	CARGAS, FUERZAS Y COMBINACIONES DE CARGAS .....	230
5.2.1	Cargas y Fuerzas.....	230
5.2.2	Combinaciones de cargas.....	232
5.3	Análisis de la estructura .....	234
	<b>ANEXO.....</b>	<b>285</b>
	ANÁLISIS DEL SISTEMA DUAL .....	286
	<b>CONCLUSIONES.....</b>	<b>312</b>
	<b>BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>315</b>

LISTA DE TABLAS

	Pág
Tabla 1. Derivas Máximas.....	226

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Viga Cargada .....	6
Figura 2: Diagrama de Cuerpo Libre del diferencial $dx$ .....	7
Figura 3: DCL para un diferencial $dx$ .....	10
Figura 4: Condiciones de Apoyo Simple .....	12
Figura 5: Condiciones de un Apoyo Empotrado .....	13
Figura 6: Condiciones de un Apoyo en Voladizo .....	13
Figura 7: Pórtico Sometido a un Sistema de Cargas .....	36
Figura 8: Análisis del Elemento $i-j$ .....	36
Figura 9: Viga Cargada .....	39
Figura 10: Momentos de Empotramiento .....	41
Figura 11: Momentos de Empotramiento .....	42
Figura 12: Rotación en el nodo $i$ de la barra $i-j$ .....	43
Figura 13: Diagrama de Momentos de la Viga Cargada .....	44
Figura 14: Rotación en el nodo $j$ de la barra $i-j$ .....	46
Figura 15: Desplazamiento Relativo entre nodos de la barra $i-j$ .....	47
Figura 16: Cálculo de Momentos debidos al desplazamiento Relativo entre nodos .....	48
Figura 17: Rotación de la barra en sentido de las manecillas del reloj .....	50
Figura 18: Rotación de la barra en sentido contrario a las manecillas del reloj .....	50
Figura 19: Cálculo de momentos totales .....	51
Figura 20: Diagramas de Cortante y de Momento de la Estructura .....	61
Figura 21: Estructura Cargada .....	75
Figura 22: Análisis del Elemento AB .....	76
Figura 23: Análisis del elemento BC .....	77

Figura 24: Barra trasladada y rotada (Combinación entre Casos 1 y 2).....	78
Figura 25: Rigidez Rotacional .....	109
Figura 26: Rotación Unitaria en el nodo A.....	109
Figura 27: Estructura con un Momento aplicado en el nodo i.....	111
Figura 28: Estructura Deformada por el Momento $M_i$ .....	112
Figura 29: Análisis de la estructura deformada .....	112
Figura 30: Análisis de cada barra de la estructura .....	113
Figura 31: Momento $M_{ij}$ aplicado en el extremo i.....	116
Figura 32: Diagrama de Cuerpo Libre de la Barra i-j.....	116
Figura 33: Cálculo de Momentos Extremos en la Barra i-j .....	117
Figura 34: Viga con Apoyos Simples y Empotramiento.....	118
Figura 35: Factor de Distribución en Apoyos Simples.....	118
Figura 36: Factor de Distribución en Apoyo empotrado .....	118
Figura 37: Viga Cargada y en voladizo .....	119
Figura 38: Simplificación de Estructura por Extremo Articulado.....	132
Figura 39: Análisis de la barra A1 .....	133
Figura 40: Estructuras con Simetría geométrica .....	142
Figura 41: Estructuras con Simetría geométrica .....	143
Figura 42: Estructura con Simetría de Cargas .....	143
Figura 43: Pórtico con Simetría de cargas .....	144
Figura 44: Estructura Inicial y Estructura Simplificada por Simetría .....	145
Figura 45: Estructura Simétrica con Número Impar de Luces.....	149
Figura 46: Estructura Sometida a Cargas .....	158
Figura 47: Análisis de la Estructura.....	159
Figura 48: Estructura Cargada y Simplemente Apoyada .....	164
Figura 49: DCL de la Estructura .....	184
Figura 50: Pórtico con carga Horizontal .....	186
Figura 51: Pórtico con fuerzas Cortantes .....	187
Figura 52: Diagrama de Cuerpo Libre de una Columna.....	188
Figura 53: Representación de las Derivas.....	225

Figura 54: Espectro de Diseño .....	272
-------------------------------------	-----

## RESUMEN

### TITULO:

ELABORACION DE LAS NOTAS DE CLASE DE LA ASIGNATURA “TEORIA DE ESTRUCTURAS II” \*

### AUTOR:

JORGE ELIECER ESCOBAR FLOREZ\*\*

**PALABRAS CLAVES:** Análisis de Estructuras, Teoría de Estructuras, Métodos de Análisis Estructural, Viga Conjugada, Slope Deflection, Método de Cross, Método de Kani, Idealización estructural.

### DESCRIPCION

El presente trabajo de grado consistió en la elaboración de un material de consulta y estudio para los estudiantes de la asignatura Teoría de Estructuras II dictada en la Escuela de Ingeniería Civil de la Universidad Industrial de Santander. En el desarrollo de este proyecto se realizaron actividades como: Asistencia y toma de notas en las clases de la asignatura, Lectura, análisis y clasificación de la información disponible, Redacción y elaboración del libro y una revisión periódica del libro por parte del director y del estudiante.

El libro consta de 5 capítulos: METODO DE LA VIGA CONJUGADA, METODO DEL SLOPE DEFLECTION, METODO DE CROSS, METODO DE KANI E IDEALIZACIÓN Y ANALISIS ESTRUCTURAL, y un anexo: ANÁLISIS MATRICIAL DE MUROS Y DEL SISTEMA DUAL. Cada uno de los capítulos consta de un marco teórico explicativo y ejercicios ilustrativos desarrollados paso a paso que le permitirán al estudiante afianzar sus conocimientos.

Con la realización de este proyecto no se quiso igualar, ni reemplazar los excelentes textos existentes sobre este tema. Además es importante mencionar, que los objetivos planteados para este libro no se cumplirían sin la ayuda del docente, ya que aparte de conocer y manejar los fundamentos teóricos del Análisis Estructural, cuenta con el bagaje profesional como docente y como ingeniero.

---

\* Trabajo de Grado, Modalidad Informe de Práctica.

\*\* Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas, Escuela de Ingeniería Civil, Director: Ing. Dalton Moreno Girardot.

## SUMMARY

### TITLE:

CLASS NOTES ABOUT THE ASIGNATURE "THEORY OF STRUCTURES II"

### AUTHOR:

JORGE ELIECER ESCOBAR FLOREZ \*\*

**KEY WORDS:** Analysis of structures, Theory of Structures, Structural Analysis Methods, Conjugated Beam, Slope Deflection, Cross Method, Kani Method, Structural Idealization.

### DESCRIPCION

The present Grade project consisted on the elaboration of a material for consultation and study for the students of the subject Theory of Structures II taught in the School of Civil Engineering of the Universidad Industrial de Santander. During the development of this project some activities were made: Taking notes during the classes of the subject, Reading, analyzing and classification of the information available, elaborating and writing the book and a scheduled inspection of the book by the director of the project and the student.

The book consists of 5 chapters: CONJUGATED BEAM METHOD, SLOPE DEFLECTION METHOD, CROSS METHOD, KANI METHOD, and IDEALIZATION ANALYSIS OF STRUCTURES, and an annex: MATRIX ANALYSIS OF WALLS AND THE DUAL SYSTEM. Each one of these chapters consists of an explanatory theoretical frame and illustrative exercises developed step by step that will allow the student to strengthen their knowledge.

With the accomplishment of this project it was not wanted to equal, or to replace the excellent existing texts of this subject. In addition it is important to mention, that the objectives raised for this book would not be fulfilled without the help of the teacher, who besides, knows and handles the theoretical foundations of the Structural Analysis, and also counts with the professional baggage as a teacher and also as an engineer.

---

\* Grade Project.

\*\*UIS Physicomechanic Engineering Faculty, Civil Engineering School, Director: Girardot Moreno, Dalton.

## INTRODUCCION

Este libro es una propuesta de proyecto de grado que nace como evolución de unas notas de clase del curso de Análisis de Estructuras II de la Universidad Industrial de Santander orientado y asesorado por el profesor Dalton Moreno que tiene como fin presentar una herramienta de apoyo que facilite la consulta, comprensión y desarrollo de competencias para el conocimiento y aprendizaje de algunos métodos de análisis estructural tradicionales, temas básicos de la Ingeniería Civil

El conocimiento de estos métodos es de gran importancia ya que han sido el fundamento teórico que rigen el comportamiento de las estructuras, esto junto con la experiencia adquirida en el ejercicio del proceso de diseño ayudan a formar en el ingeniero civil un buen criterio estructural para calcular estructuras confiables

Aunque actualmente existen programas computacionales que calculan estructuras más complejas de manera rápida y exacta, es necesario motivar en los estudiantes el conocimiento de la fundamentación teórica de los mismos con el fin de desarrollar su capacidad analítica, lógica y racional y cultivar su apreciación, su sentido y su intuición, con relación al comportamiento de las estructuras, sin perder de vista aspectos relevantes.

Se pretende que el ingeniero civil al adquirir el acervo cognoscitivo conjuntamente con el desarrollo de las destrezas y competencias básicas propias de su formación, sea un profesional exitoso en el manejo de los conocimientos de Análisis de Estructuras, con mucha responsabilidad social para de esta manera lograr construir conjuntamente un mejor país



El trabajo escrito está diseñado para ser utilizado dentro de los procesos de enseñanza-aprendizaje y podría ser usado como material de apoyo en la materia de Análisis de Estructuras II para reforzar el desarrollo profesional

Sería una pretensión arrogante de mi parte querer reemplazar o igualar con este escrito, los valiosos y excelentes libros que sobre esta materia se han escrito, simplemente es mi intención presentar un material de apoyo sencillo que facilite al estudiante entender algunos métodos de análisis de estructuras

## **OBJETIVOS**

### **OBJETIVO GENERAL**

Desarrollar un material escrito de consulta para los estudiantes de Ingeniería Civil, que contenga los temas tratados en la asignatura Teoría de Estructuras II.

### **OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Ofrecer al estudiante de Ingeniería civil una herramienta de estudio y consulta sobre los temas: Viga Conjugada, Slope Deflection, Método de Kani, Método de Cross y Análisis Matricial de sistema Dual (Muro – Pórtico).
- Presentar un marco teórico acorde a las explicaciones del docente del curso y complementado con el análisis de la literatura disponible buscando usar un lenguaje claro.
- Demostrar algunos ejercicios Tipo de cada tema, que sirvan como modelo en la solución de problemas y que permitan aclarar las posibles dudas que el estudiante presente.
- Plantear una serie de ejercicios sobre los temas tratados en clase de Teoría de Estructuras II, para que el estudiante logre afianzar los conocimientos adquiridos.
- Promover un aprendizaje significativo a través de la resolución de problemas por parte de los estudiantes sobre los siguientes tópicos: Idealización Estructural, Diversas combinaciones de fuerzas y Análisis para encontrar desplazamientos, rotaciones, reacciones y fuerzas internas en los diferentes elementos estructurales.

## 1. MÉTODO DE LA VIGA CONJUGADA

### 1.1 INTRODUCCIÓN

El cálculo de las deformaciones que sufre un elemento estructural o una estructura completa bajo la acción de cargas u otro tipo de efectos tiene mucha importancia en el análisis y diseño de estructuras, ya que existen límites permisibles para las deformaciones por motivos de seguridad y estéticos. En ambos casos, además de producirse una mala apariencia de la estructura, una deformación excesiva puede producirle daños a otros elementos estructurales o no estructurales, tales como agrietamientos en techos y en paredes por ejemplo. Las deflexiones son importantes en el análisis dinámico de las estructuras, como cuando se estudia la respuesta de un edificio ante un sismo o cuando la estructura soporta maquinaria pesada, la cual tiene componentes que rotan o se desplazan periódicamente generando entre otros, vibraciones importantes.

A través de la historia se han desarrollado métodos muy importantes para el cálculo de las deformaciones en las estructuras, los cuales han sido fundamentales para el análisis estructural. Algunos de estos métodos fueron tratados en asignaturas como *“Resistencia de Materiales y Análisis de Estructuras 1”*.

Entre ellos tenemos:

- Método del Área – Momento
- Método de la Doble Integración
- Método del Trabajo Real
- Método del Trabajo Virtual
- Método de La Viga Conjugada

Este ultimo método será el que se estudiará en el presente capítulo. A su vez este método sirve como base para explicar algunos otros métodos que se analizarán en los próximos capítulos.

## **1.2 CONCEPTOS PREVIOS**

### **1.2.1 Principio de Superposición**

El principio de superposición es la base fundamental de una gran cantidad de métodos de análisis estructural.

Este principio puede enunciarse de la siguiente manera: *“El desplazamiento o esfuerzo total en un punto de una estructura sometida a varias cargas se puede determinar sumando los desplazamientos o esfuerzos que ocasiona cada una de las cargas que actúan por separado”*.

Para que esto sea válido, es necesario que exista una relación lineal entre las cargas, los esfuerzos y desplazamientos.

Dos requisitos fundamentales deben cumplirse para que el principio de superposición sea aplicable:

- El material estructural debe comportarse de manera elástica - lineal, a fin de que sea válida la ley de Hooke y la carga sea proporcional al desplazamiento.
- La geometría de la estructura no debe sufrir cambios importantes cuando se aplican cargas. Si los desplazamientos son grandes, entonces cambian considerablemente la posición y la orientación de las cargas. Este efecto se presenta en elementos sometidos a flexo-compresión.

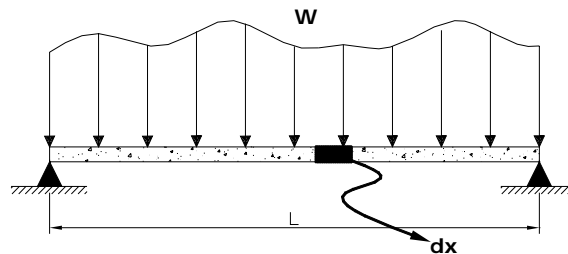
## **1.3 MARCO TEÓRICO**

El método de la viga conjugada, desarrollado por Otto Mohr alrededor del año de 1860, es un método bastante sencillo y práctico que nos permitirá encontrar las pendientes y las deflexiones causadas por un sistema de cargas externas aplicadas sobre la viga real mediante el cálculo de los cortantes y momentos internos de una viga análoga llamada “viga conjugada” de igual longitud pero cargada con el diagrama  $M/EI$  de la viga original.

La analogía entre la viga real y la viga conjugada se basa en la similaridad existente entre las relaciones de la carga ( $W$ ), la fuerza cortante ( $V$ ) y el momento flexionante ( $M$ ), y las relaciones entre  $M/EI$ , la pendiente ( $\theta$ ) y la deflexión ( $y$ ).

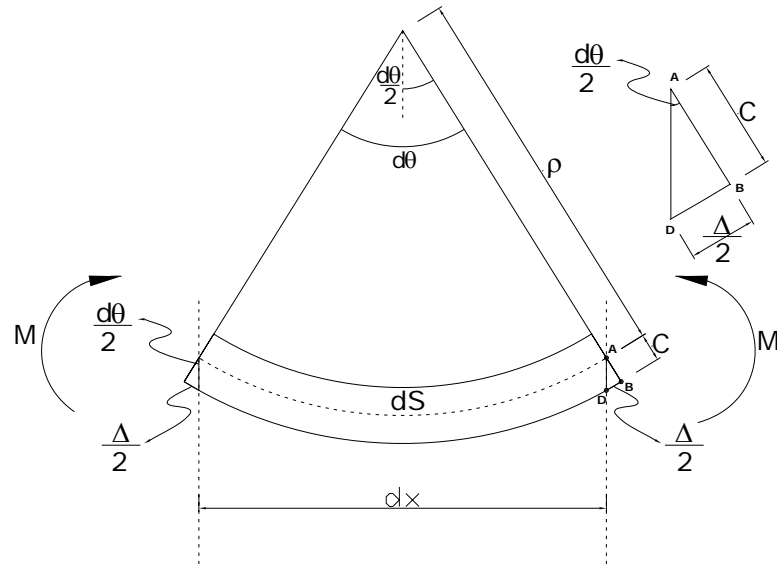
A continuación se muestra la deducción de los principios de este método. Se recurre a conceptos básicos de geometría y de otras asignaturas vistas anteriormente.

**Figura 1: Viga Cargada**



Considerando una viga simplemente apoyada, deformada elásticamente por un sistema de cargas cualquiera aplicado perpendicularmente al eje de la viga y tomando un elemento diferencial  $dx$ . Para su análisis se tiene:

**Figura 2:** Diagrama de Cuerpo Libre del diferencial  $dx$



El momento interno **M** de la viga deforma el elemento **dx** de tal manera que las tangentes de cada lado del elemento se intersecan formando un ángulo igual a **dθ**. A su vez, el momento **M** genera una elongación de la fibra a tensión mas alejada del eje neutro igual a  $\Delta$  ( $\Delta/2$  en cada lado).

Las deformaciones que sufren las estructuras en la ingeniería civil son muy pequeñas comparadas con la longitud de los elementos y por consiguiente los radios de curvatura **r** son muy grandes. Bajo las anteriores condiciones es permitido hacer las siguientes consideraciones:

- $dx \cong ds$   
 $\Delta x \cong \Delta s$

**Ecuación 1.1**

Haciendo uso de estas aproximaciones y de la geometría del gráfico se pueden plantear las siguientes relaciones:

- $\frac{d\theta}{2} = \frac{(\Delta x/2)}{C} \rightarrow d\theta = \frac{\Delta x}{C}$

**Ecuación 1.2**

- $dx = d\theta \cdot r \quad \rightarrow \quad d\theta = \frac{dx}{r}$  **Ecuación 1.3**

$r$  = Radio de curvatura de la fibra en el eje neutro

Teniendo en cuenta algunos conceptos previos vistos en la asignatura de resistencia de materiales:

- *Ley de Hooke:*

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \textbf{Ecuación 1.4}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{dx} \quad \text{donde} \quad \varepsilon = \frac{\text{Alargamiento o Acortamiento total}}{\text{Longitud Inicial}} \quad \textbf{Ecuación 1.5}$$

- $\sigma = \frac{My}{I} \quad \rightarrow \quad \sigma_{\max} = \frac{M \cdot C}{I}$  **Ecuación 1.6**

Siendo  $y$  = Distancia desde el eje neutro hasta el punto donde se quiere evaluar el esfuerzo.

$C$  = Distancia maxima desde el eje neutro hasta la fibra mas externa del elemento.

Reemplazando la **Ecuación 1.6** en la **Ecuación 1.4**, se obtiene:

$$\varepsilon = \frac{M \cdot C}{E \cdot I}$$

Ahora, reemplazando la anterior expresión en la ecuación 1.5:

$$\frac{\Delta x}{dx} = \frac{M \cdot C}{E \cdot I}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por **dx**, y dividiendo por **C** se tiene:

$$d\theta = \frac{M}{E \cdot I} dx$$

$$\theta = \int \frac{M}{E \cdot I} dx$$

**Ecuación 1.7**

Donde:

E = Modulo de elasticidad del material

I = El momento de Inercia de la viga con respecto al eje neutro

La anterior expresión se puede relacionar con la ecuación 1.3

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{E \cdot I}$$

**Ecuación 1.8**

La curva elástica presenta una relación entre el radio de curvatura y la pendiente de la curva, la cual se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2 y / dx^2}{(1 + (dy / dx)^2)^{3/2}}$$

**Ecuación 1.9**

Si las pendientes son pequeñas, como se ha venido suponiendo, el término (**dy/dx**), que representa la pendiente de la curva es despreciable, obteniendo así:

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2 y}{dx^2} \rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot I}$$

Integrando la expresión anterior se obtiene la ecuación 1.10, con la cual se puede calcular la rotación  $\theta$  en cualquier punto de la viga:



$$\theta = \frac{dy}{dx} = \int \left( \frac{M}{EI} \right) dx$$

**Ecuación 1.10**

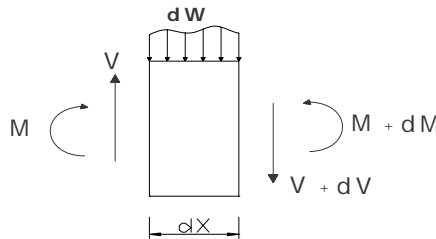
Siendo esta la misma expresión obtenida en la ecuación 1.7 Integrando por segunda vez la ecuación anterior inicial, se obtiene la deflexión **y** en cualquier punto de la viga:

$$y = \iint \left( \frac{M}{EI} dx \right) dx$$

**Ecuación 1.11**

Recordando las relaciones existentes entre la carga (**W**), la fuerza cortante (**V**) y el momento (**M**) para un elemento de longitud **dx**:

**Figura 3:** DCL para un diferencial dx



$$\frac{dV}{dx} = w \quad \rightarrow \quad V = \int w dx \quad \text{Ecuación 1.12}$$

$$\frac{dM}{dx} = V \quad \rightarrow \quad M = \int V dx = \iint (w dx) dx \quad \text{Ecuación 1.13}$$

En el siguiente cuadro se resumen las ecuaciones básicas necesarias para el método:

$\theta = \int \frac{M}{EI} dx$	<b>Ecuación 1.10</b>	$V = \int w dx$	<b>Ecuación 1.12</b>
$y = \iint \left( \frac{M}{EI} dx \right) dx$	<b>Ecuación 1.11</b>	$M = \iint (w dx) dx$	<b>Ecuación 1.13</b>

Ahora, considere una viga ficticia llamada “Viga Conjugada” de longitud igual a la de la viga real y cargada con el diagrama de momento dividido entre la rigidez **EI** (  $\bar{W} = \frac{M}{EI}$  ), calculando la fuerza cortante y el momento flexionante para esta viga haciendo uso de la similitud con las ecuaciones **1.12 y 1.13**, se obtiene:

$$\bar{V}_{conj} = \int \bar{W} dx = \int \frac{M}{EI} dx \quad \text{Ecuación 1.14}$$

$$\bar{M}_{conj} = \iint (\bar{W} dx) = \iint \left( \frac{M}{EI} dx \right) dx \quad \text{Ecuación 1.15}$$

Si se comparan las ecuaciones **1.14 y 1.15** con las ecuaciones **1.10 y 1.11** se deduce que la *rotación* ( **$\theta$** ) en la viga real es igual a la *fuerza cortante*  $\bar{V}_{conj}$  en la viga conjugada y que la *deflexión* ( **$y$** ) en la viga real es igual al *momento flexionante*  $\bar{M}_{conj}$  de la viga conjugada.

Lo anterior se puede resumir en dos teoremas fundamentales conocidos como los teoremas de la viga conjugada y se presentan a continuación:

**Teorema 1:** La pendiente ( **$\theta$** ) en un punto de la viga real es igual a la fuerza cortante ( $\bar{V}_{conj}$ ) en el mismo punto de la viga conjugada.

$$\theta_{real}(Xi) = \bar{V}_{conj}(Xi)$$

- **Teorema 2:** La deflexión ( $y$ ) en cualquier punto de la viga real es igual al momento ( $\overline{M}_{conj}$ ) del punto correspondiente en la viga conjugada.

$$y_{real}(Xi) = \overline{M}_{conj}(Xi)$$

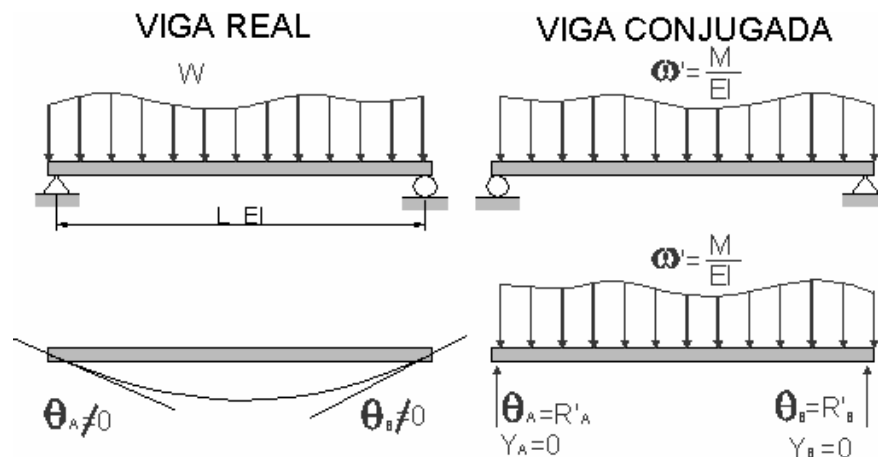
## 1.4 CONDICIONES DE APOYO DE LA VIGA CONJUGADA

Haciendo uso de los anteriores teoremas se establecen las condiciones de apoyo que tendrá la viga conjugada para que se produzca la correcta equivalencia entre viga real y la conjugada. Es decir, cuando se dibuja la viga conjugada es muy importante que el cortante y el momento que se generan en sus apoyos sean tales que correspondan a la pendiente y al desplazamiento que ocurren en los apoyos de la viga real.

### 1.4.1 Apoyo simple en la viga real:

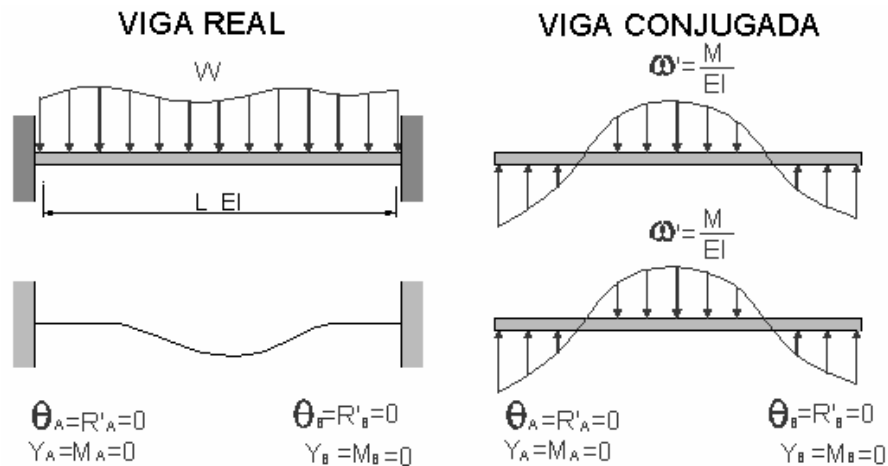
En este tipo de apoyo hay rotación pero no deflexión, lo cual implica que en la viga conjugada hay cortante pero no momento, es decir las mismas condiciones que ofrece el mismo apoyo simple.

**Figura 4:** Condiciones de Apoyo Simple



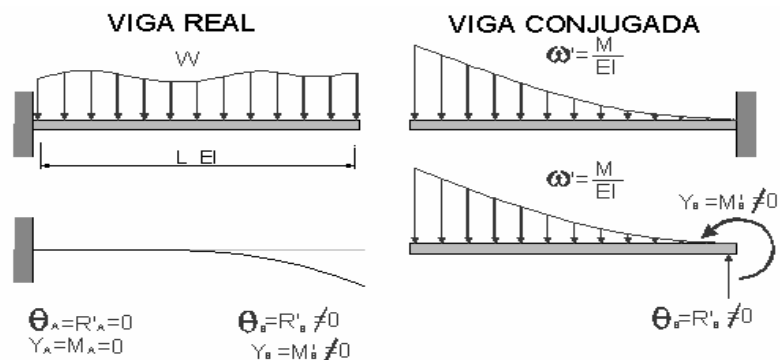
**1.4.2 Apoyo empotrado en la viga real:** En este tipo de apoyo no hay rotación ni deflexión, de tal manera que en la viga conjugada no puede haber cortante ni momento, lo cual sólo se logra dejando los extremos libres como si estuviera en el aire.

**Figura 5:** Condiciones de un Apoyo Empotrado



**1.4.3 Voladizo en la viga real:** En el extremo libre de la viga real se presenta rotación y deflexión, de tal manera que viga conjugada tendrá cortante y momento. El empotramiento modela estas dos condiciones.

**Figura 6:** Condiciones de un Apoyo en Voladizo



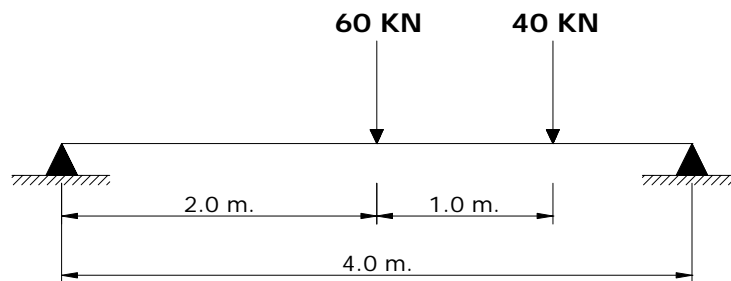
### Importante:

- En todos los casos, la viga conjugada debe ser determinada, pues una viga conjugada indeterminada implicaría tener una viga real inestable.
- Cargando la viga conjugada con el diagrama ( $\bar{W} = \frac{M}{EI}$ ) del lado de compresión de la viga real y tomando como convención el origen de la viga en su extremo izquierdo, el sentido positivo del eje  $x$  hacia la derecha y el sentido positivo del eje  $y$  puede decirse que: un cortante positivo representa una rotación de la viga en el sentido de las manecillas del reloj (pendiente negativa) y un momento positivo se interpreta como una deflexión hacia abajo.

## 1.5 EJERCICIOS DE APLICACIÓN

### Ejercicio 1.1

Encuentre el valor de  $\theta_A$ ,  $\theta_D$ ,  $\theta_B$  y  $\Delta_c$  para la siguiente viga:

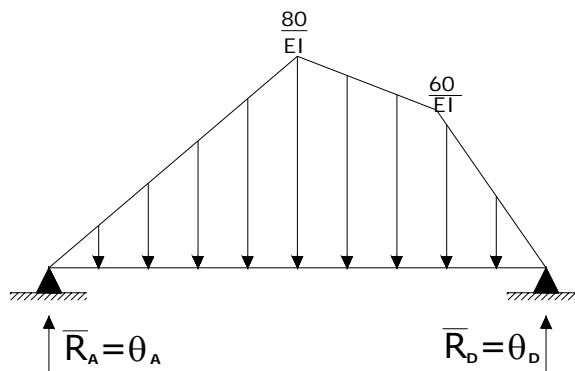


- Como primer paso se construye los diagramas de cortante y momento de la viga real.

$$\sum M_A = 0 = -60 \cdot 2 - 40 \cdot 3 + R_D \cdot 4 \quad \rightarrow \quad R_D = 60 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 = -60 - 40 + 60 + R_A \quad \rightarrow \quad R_A = 40 \text{ KN}$$

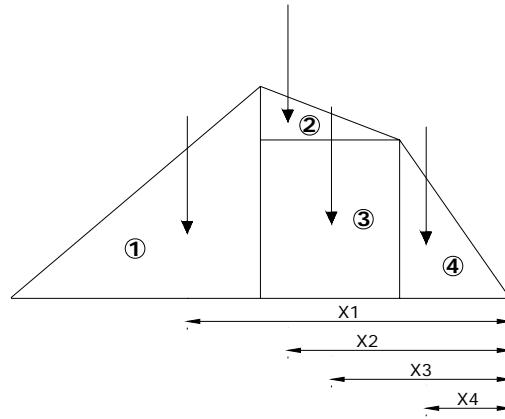
- Conocido el diagrama de momentos de la viga real se procede a cargar la viga conjugada con el diagrama  $\mathbf{M/EI}$ . Se deben tener en cuenta las condiciones de apoyo que tendrá la viga conjugada. Analizando la viga real, tanto el apoyo A como en el apoyo D son apoyos simples los cuales permiten que los extremos roten. Estas rotaciones son cortantes en la viga conjugada y se representan como apoyos simples.



- Cálculo de  $\theta_A$  y  $\theta_D$ :*

La rotación en el nodo A y en el nodo D son iguales a las reacciones en el punto A ( $\overline{R_A}$ ) y en el punto D ( $\overline{R_D}$ ) de la viga conjugada, éstas se calculan aplicando en el diagrama de cuerpo libre de la viga conjugada las ecuaciones básicas de equilibrio.

Para facilitar los cálculos se divide el diagrama  $\mathbf{M/EI}$  en 4 secciones y se calcula el valor de la fuerza de cada sección y su punto de aplicación con respecto al nodo B.



Sección	Figura	Fuerza (Rad.)	Punto de Aplicación (m)*
1		$\downarrow F_1 = \frac{1}{2} \cdot (2) \left( \frac{80}{EI} \right) = \frac{80}{EI}$	$X_1 = 2.67$
2		$\downarrow F_2 = \frac{1}{2} \cdot (1) \left( \frac{20}{EI} \right) = \frac{10}{EI}$	$X_2 = 1.67$
3		$\downarrow F_3 = (1) \left( \frac{60}{EI} \right) = \frac{60}{EI}$	$X_3 = 1.5$
4		$\downarrow F_4 = \frac{1}{2} \cdot (1) \left( \frac{60}{EI} \right) = \frac{30}{EI}$	$X_4 = 0.67$
* Las distancias $X_i$ son medidas desde el apoyo D hasta la posición de la resultante $F_i$			

$$\sum M_D = (2.67) \cdot \left( \frac{80}{EI} \right) + (1.67) \cdot \left( \frac{10}{EI} \right) + (1.5) \cdot \left( \frac{60}{EI} \right) + (0.67) \cdot \left( \frac{30}{EI} \right) - 4 \cdot (\overline{R_A}) = 0$$

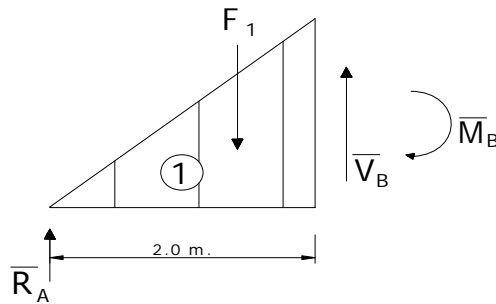
$$\overline{R_A} = \theta_A = \frac{85.1}{EI} = \frac{85.1}{10000} = 8.51 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\sum F_y = - \left[ \left( \frac{80}{EI} \right) + \left( \frac{10}{EI} \right) + \left( \frac{60}{EI} \right) + \left( \frac{30}{EI} \right) \right] + 8.51 \times 10^{-3} + (\overline{R_D}) = 0$$

$$\overline{R_D} = \theta_D = 9.49 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

- *Cálculo de  $\theta_B$ :*

La rotación en el punto  $B$  de la viga real ( $\theta_B$ ) es igual al cortante en el punto  $B$  de la viga conjugada ( $\overline{V}_B$ ). Para esto se analiza el diagrama de cuerpo libre de la viga conjugada a la izquierda del punto  $B$ :



$$\sum F_y = \overline{R}_A - F_1 + \overline{V}_B = 0$$

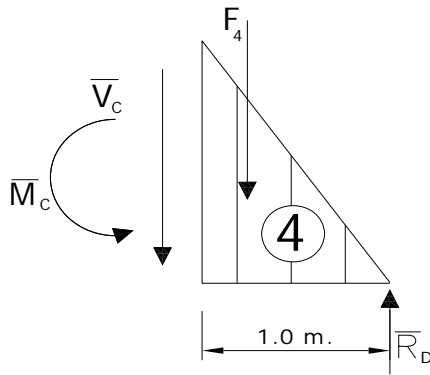
$$\overline{V}_B = \left( \frac{80}{EI} \right) - \overline{R}_A = 8.0 \times 10^{-3} - 8.51 \times 10^{-3} = -5.1 \times 10^{-4} \text{ rad.}$$

$$\overline{V}_B = \theta_B = -5.1 \times 10^{-4} \text{ rad.}$$

- *Cálculo de  $\Delta_C$ :*

La deflexión en el punto  $C$  de la viga real ( $\Delta_C$ ) es igual al momento en  $C$  de la viga conjugada ( $\overline{M}_C$ ). Para esto se analiza el diagrama de cuerpo libre de la viga conjugada a la derecha del punto  $C$ :





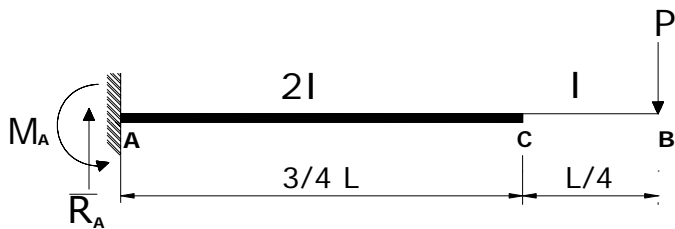
$$\sum M_c = \overline{M}_c - \frac{1}{3} F_4 + 1 \cdot (\overline{R}_D) = 0$$

$$\overline{M}_c = \Delta_c = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{30}{10000} \right) - 1 \cdot (9.49 \times 10^{-3}) = 8.49 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

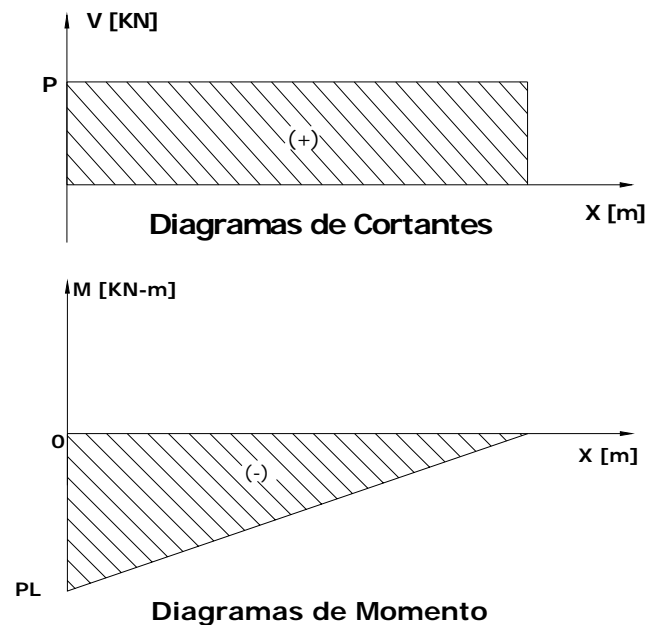
El signo positivo indica que la deflexión es hacia abajo (negativa).

## Ejercicio 1.2

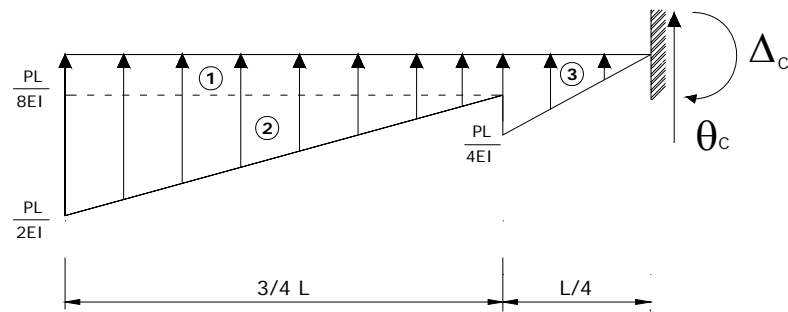
Calcular las deflexiones y rotaciones en los puntos *B* y *C* de la siguiente viga:



- Inicialmente se calcula el diagrama de cortante y de momento de la viga:



- Antes de cargar la viga conjugada con el diagrama  $M/EI$  es importante tener en cuenta que el segmento AB de la viga real presenta una inercia  $2I$ , lo cual hace que el diagrama original de momento se reduzca a la mitad en este tramo.
- También es importante analizar las condiciones de apoyo que presenta la viga real. El apoyo A se encuentra empotrado, impidiendo así la rotación y la deflexión del nodo. Este apoyo se representa en la viga conjugada como un apoyo libre. Caso contrario se da en el apoyo C de la viga real, el cual es un apoyo libre que permite la rotación y deflexión del nodo, convirtiéndose en un empotramiento en la viga conjugada.

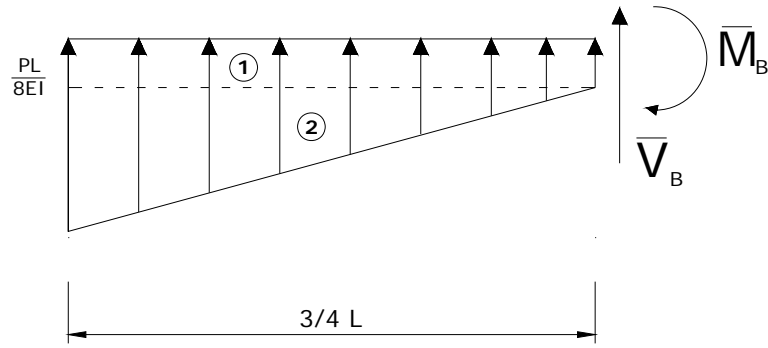


- Para facilitar los cálculos se divide el diagrama  $M/EI$  en 3 secciones y se calcula el valor de la fuerza de cada sección y su punto de aplicación con respecto al nodo C.

Sección	Figura	Fuerza (Rad.)	Punto de Aplicación (m)*
1		$\uparrow F_1 = \left(\frac{3}{4}L\right)\left(\frac{PL}{8EI}\right) = \frac{3}{32} \frac{PL^2}{EI}$	$X_1 = \frac{5}{8}L$
2		$\uparrow F_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}L\right)\left(\frac{3}{8} \frac{PL}{EI}\right) = \frac{9}{64} \frac{PL^2}{EI}$	$X_2 = \frac{3}{4}L$
3		$\uparrow F_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}L\right)\left(\frac{1}{4} \frac{PL}{EI}\right) = \frac{1}{32} \frac{PL^2}{EI}$	$X_3 = \frac{1}{6}L$
* Las distancias $X_i$ son medidas desde el apoyo C hasta la posición de la resultante $F_i$			

- Cálculo de  $\theta_B$  y  $\Delta_B$ :

Para el cálculo de la rotación y la deflexión de la viga real en el punto B, se consigue el valor del cortante y del momento en el punto B de la viga conjugada. Para esto se utiliza el diagrama de cuerpo libre de la viga conjugada a la izquierda de B.



- $\sum F_y = F_1 + F_2 + (\bar{V}_B) = 0$

$$\bar{V}_B = \theta_B = -\left[ \frac{3}{32} \frac{PL^2}{EI} + \frac{9}{64} \frac{PL^2}{EI} \right] = -\frac{15}{64} \frac{PL^2}{EI} \text{ rad}$$

- $\sum M_B = -\bar{M}_B + \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{3}{4} L \right) \right] \cdot F_1 + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{3}{4} L \right) \right] \cdot F_2 = 0$

$$\bar{M}_B = \Delta_B = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{3}{4} L \right) \right] \cdot \left( \frac{3}{32} \frac{PL^2}{EI} \right) + \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{3}{4} L \right) \right] \cdot \left( \frac{9}{64} \frac{PL^2}{EI} \right)$$

$$\bar{M}_B = \Delta_B = \frac{27}{256} \frac{PL^3}{EI}$$

- Cálculo de  $\theta_C$  y  $\Delta_C$ :

La rotación y la deflexión en punto C de la viga real son iguales a las reacciones que presenta la viga conjugada en este punto. Para conocer estos valores se aplica los principios básicos de equilibrio a toda la viga:

- $\sum F_y = F_1 + F_2 + F_3 + (\bar{R}_C) = 0$

$$\bar{R}_C = \theta_C = -\left[ \frac{3}{32} \frac{PL^2}{EI} + \frac{9}{64} \frac{PL^2}{EI} + \frac{1}{32} \frac{PL^2}{EI} \right] = -\frac{17}{64} \frac{PL^2}{EI} \text{ rad}$$

- $\sum M_C = -\bar{M}_C + \left[ \frac{5}{8} L \right] \cdot F_1 + \left[ \frac{3}{4} L \right] \cdot F_2 + \left[ \frac{1}{6} L \right] \cdot F_3 = 0$

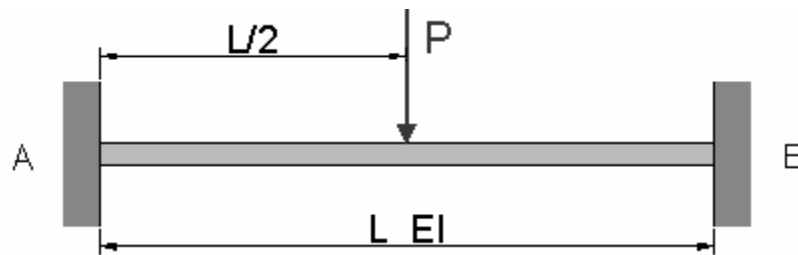
$$\bar{M}_C = \Delta_C = \left[ \frac{5}{8} L \right] \cdot \left( \frac{3}{32} \frac{PL^2}{EI} \right) + \left[ \frac{3}{4} L \right] \cdot \left( \frac{9}{64} \frac{PL^2}{EI} \right) + \left[ \frac{1}{6} L \right] \cdot \left( \frac{1}{32} \frac{PL^2}{EI} \right)$$

$$\overline{M}_c = \Delta_c = \frac{65}{384} \frac{PL^3}{EI} m.$$

El método de la viga conjugada también es de gran utilidad para resolver vigas estáticamente indeterminadas como se muestra a continuación.

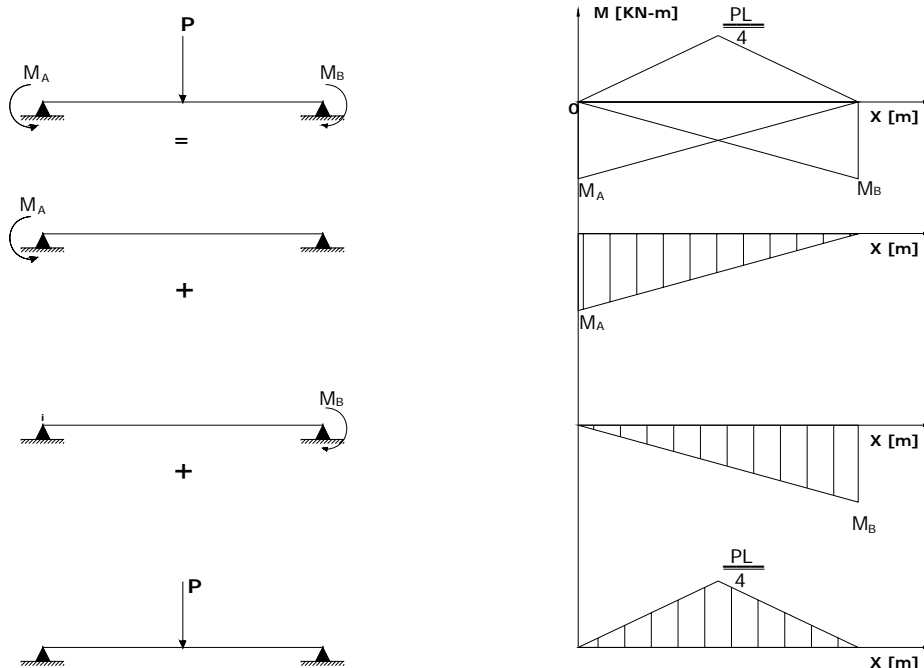
### 4.3 Ejercicio 3

Encuentre el valor de los momentos extremos  $M_A$  y  $M_B$ , las reacciones  $R_A$  y  $R_B$  y la deflexión máxima  $\Delta_{MAX}$  que se presenta en la siguiente viga.



La viga es estáticamente indeterminada y no puede ser resuelta aplicando las ecuaciones básicas de equilibrio. Para solucionarla se hace uso del principio de superposición y del método de la viga conjugada.

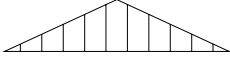
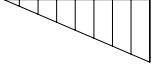
Considere como redundantes los momentos en los extremos  $M_A$  y  $M_B$ . Haciendo uso del principio de superposición se aplica el efecto de la carga  $P$ , del momento  $M_A$  y del momento  $M_B$  por separado, obteniendo así tres vigas, las cuales se muestran a continuación:



Como se ha visto en ejemplos anteriores, es necesario definir los apoyos de la viga conjugada. Analizando la viga real se observa que los apoyos A y B se encuentran restringidos para rotar y desplazarse, por lo tanto la viga conjugada no tendrá apoyos, es decir, se supone que está en el aire, pero se mantiene en equilibrio bajo la acción de la carga  $M/EI$ .

Se cargará la viga conjugada con los diagramas de momento de los 3 efectos divididos entre el factor de rigidez  $EI$  ( $P$ ,  $M_A$  y  $M_B$ ). Para hacer más fáciles y entendibles los cálculos, se calcula el valor de la fuerza resultante de cada diagrama y su punto de aplicación con respecto al nodo  $B$ .

Sección	Figura	Fuerza (Rad.)	Punto de Aplicación (m)*
1		$\uparrow F_1 = \frac{1}{2} \cdot (L) \cdot \left( \frac{M_A}{EI} \right) = \frac{1}{2} \frac{M_A \cdot L}{EI}$	$X_1 = \frac{2}{3} L$

2		$\downarrow F_2 = \frac{1}{2} \cdot (L) \cdot \left(\frac{PL}{4EI}\right) = \frac{1}{8} \frac{PL^2}{EI}$	$X_2 = \frac{1}{2} L$
3		$\uparrow F_3 = \frac{1}{2} \cdot (L) \cdot \left(\frac{M_A}{EI}\right) = \frac{1}{2} \frac{M_B \cdot L}{EI}$	$X_3 = \frac{1}{3} L$
* Las distancias $X_i$ son medidas desde el apoyo B hasta la posición de la resultante $F_i$			

- Cálculo del momento  $M_A$  y  $M_B$ :

El valor de los momentos extremos  $M_A$  y  $M_B$  de la viga real son desconocidos; pero analizando el diagrama de carga de la viga conjugada se observa que tanto el momento  $M_A$  como el  $M_B$  están presentes.

Dibujando los resultados de los 3 diagramas en la viga y haciendo una sumatoria de momentos con respecto al punto de aplicación de la fuerza resultante  $F_3$  para eliminar la incógnita  $M_B$  se tiene la siguiente expresión:

$$\sum M_{F_3} = -[X_1 - X_3] \cdot F_1 + [X_2 - X_3] \cdot F_2 = 0$$

$$\left[\frac{2}{3}L - \frac{1}{3}L\right] \cdot \frac{1}{2} \frac{M_A \cdot L}{EI} = \left[\frac{1}{2}L - \frac{1}{3}L\right] \cdot \frac{1}{8} \frac{PL^2}{EI}$$

$$\left[\frac{1}{3}L\right] \cdot \frac{1}{2} \frac{M_A \cdot L}{EI} = \left[\frac{1}{6}L\right] \cdot \frac{1}{8} \frac{PL^2}{EI}$$

Despejando  $M_A$  se obtiene:

$$M_A = \frac{PL}{8}$$

Conocido el valor de  $M_A$ , se hace una sumatoria de fuerzas para conocer el valor de  $M_B$ .

$$\sum F_y = F_1 - F_2 + F_3 = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{M_A \cdot L}{EI} - \frac{1}{8} \frac{PL^2}{EI} + \frac{1}{2} \frac{M_B \cdot L}{EI} = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{(PL/8) \cdot L}{EI} - \frac{1}{8} \frac{PL^2}{EI} + \frac{1}{2} \frac{M_B \cdot L}{EI} = 0$$

Despejando para  $M_B$  se tiene:

$$M_B = \frac{PL}{8} \text{ KN} - m.$$

De esta manera se calculó el valor de los momentos extremos de la viga real. Como era de esperarse, los momentos  $M_A$  y  $M_B$  son iguales. Esto se debe a que caga **P** se aplico en la mitad de la viga.

- Cálculo de las reacciones  $R_A$  y  $R_B$ :

Conocidos los valores de los momentos en los extremos de la viga real, el calculo del valor de las reacciones se consigue aplicando las ecuaciones básicas de equilibrio en la viga real:

$$\sum M_B = M_A - M_B + P \cdot \frac{L}{2} - R_A \cdot L = 0$$

Siendo  $M_A = M_B$  como se demostró anteriormente se tiene:



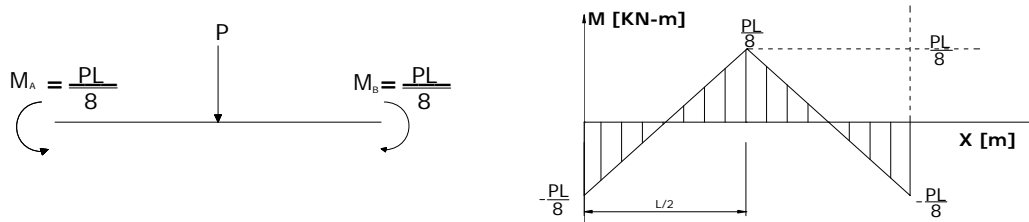
$$R_A = \frac{P}{2}$$

Y por consiguiente:

$$R_B = \frac{P}{2}$$

- Cálculo de la deflexión máxima  $\Delta_{MAX}$  :

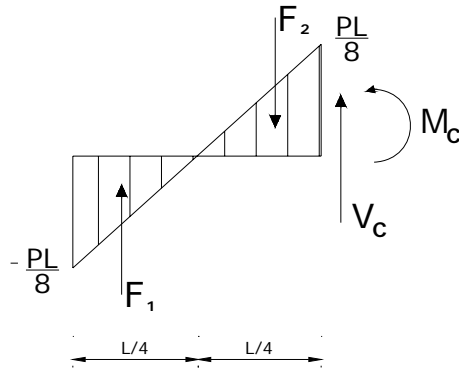
Superponiendo los tres efectos analizados y dibujando el diagrama de momentos total, se obtiene el siguiente grafico:



Este es el mismo diagrama de momento generado solamente por la carga **P** pero se ha desplazado hacia abajo el valor del momento  $M_A$  o  $M_B$  ( $PL/8$ ).

La deflexión máxima de la viga real se presenta en el punto donde el momento de la viga conjugada  $\overline{M}_{conj}$  es máximo. En este punto, la pendiente de la viga real es igual a 0 ( $\theta_{REAL} = 0$ ) o equivalentemente en la viga conjugada, es el punto en donde el cortante es igual a 0 ( $\overline{V}_{conj} = 0$ ). En este caso, debido a la simetría que presenta la viga real, la deflexión máxima se presenta en el centro de la luz.

Para el cálculo de la deflexión máxima de la viga real se toma el diagrama de cuerpo libre de la viga conjugada a la izquierda o derecha del punto C, y se calcula el valor del momento en este punto.



El calculo de la resultante se obtiene dividiendo el diagrama de carga **M/EI** en dos triángulos, que por simetría son iguales lo mismo que la distancia desde el punto C al punto de aplicación de la resultante.

Sección	Figura	Fuerza (Rad.)	Punto de Aplicación (m)*
1		$\uparrow F_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{L}{4}\right) \cdot \left(\frac{PL}{8EI}\right) = \frac{1}{64} \frac{PL^2}{EI}$	$X_1 = \frac{5}{12} L$
2		$\downarrow F_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{L}{4}\right) \cdot \left(\frac{PL}{8EI}\right) = \frac{1}{64} \frac{PL^2}{EI}$	$X_2 = \frac{1}{12} L$
* Las distancias $X_i$ son medidas desde el punto B hasta la posición de la resultante $F_i$			

$$\sum M_c = \overline{M} + \left(\frac{1}{12} \cdot L\right) \left(\frac{1}{64} \frac{PL^2}{EI}\right) - \left(\frac{5}{12} \cdot L\right) \left(\frac{1}{64} \frac{PL^2}{EI}\right) = 0$$

$$\overline{M} = \frac{1}{192} \frac{PL^3}{EI}$$

$$\Delta_{MAX} = \overline{M}_{MAX} = \frac{1}{192} \frac{PL^3}{EI} \downarrow$$

Existe otra alternativa para hallar el  $\Delta_{MAX}$ . Recordando que  $\overline{W} = \frac{M}{EI}$  y revisando las ecuaciones 1.10, 1.11, 1.12 y 1.13 se tiene:

$$\begin{aligned}\overline{V}_{conj} = \theta &= \int \overline{W} dx = \int \frac{M}{EI} dx & \overline{M}_{conj} = y &= \iint (\overline{W} dx) = \iint \left( \frac{M}{EI} dx \right) dx \\ \overline{M}_{conj} &= \int \overline{V}_{conj} = \iiint \left( \frac{M}{EI} dx \right) dx\end{aligned}$$

Integrando la ecuación del cortante de la viga conjugada  $\overline{V}_{conj}$  se obtiene el valor de momento  $\overline{M}_{conj}$  que corresponde a la deflexión de la viga real. Utilizando como limites de integración el punto A (L=0) hasta el punto C (L/2) y evaluando esta integral, se obtiene la deflexión en el punto C.

Primero se obtiene la ecuación que rige la carga  $\overline{W}$  de la viga conjugada en el tramo AC, la cual no es más que la ecuación de la recta que une los puntos A y C evaluada en cualquier punto:

$$\overline{W} = \frac{M(x)}{EI} = \frac{P}{2EI}x - \frac{PL}{8EI}$$

Integrando la ecuación de la carga  $\overline{W}$  se obtiene el cortante  $\overline{V}_{conj}$ :

$$\overline{V}(x) = \int \overline{W} dx = \int \left( \frac{P}{2EI}x - \frac{PL}{8EI} \right) dx$$

$$\overline{V}(x) = \frac{P}{2EI} \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{L}{4}x \right]$$

E integrando la ecuación del cortante  $\overline{V}(x)$  se obtiene la ecuación de momento  $\overline{M}(x)$  la cual se evaluará entre **0** y **L/2**:

$$\overline{M}_{MAX} = \int \overline{V}(x) = \int_0^{\frac{L}{2}} \left[ \frac{P}{2EI} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{L}{4}x \right) \right] dx$$

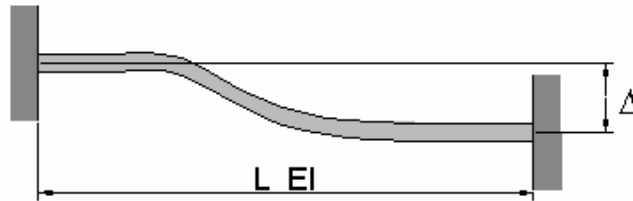
$$\overline{M}_{MAX} = \Delta_{MAX} = \frac{P}{2EI} \left[ \frac{x^3}{6} - \frac{L}{8}x^2 \right]_0^{\frac{L}{2}} = \frac{P}{2EI} \left[ -\frac{L^3}{96} \right]$$

$$\overline{M}_{MAX} = \Delta_{MAX} = \frac{1}{192} \frac{PL^3}{EI} \downarrow$$

Comprobando que se llega al mismo resultado.

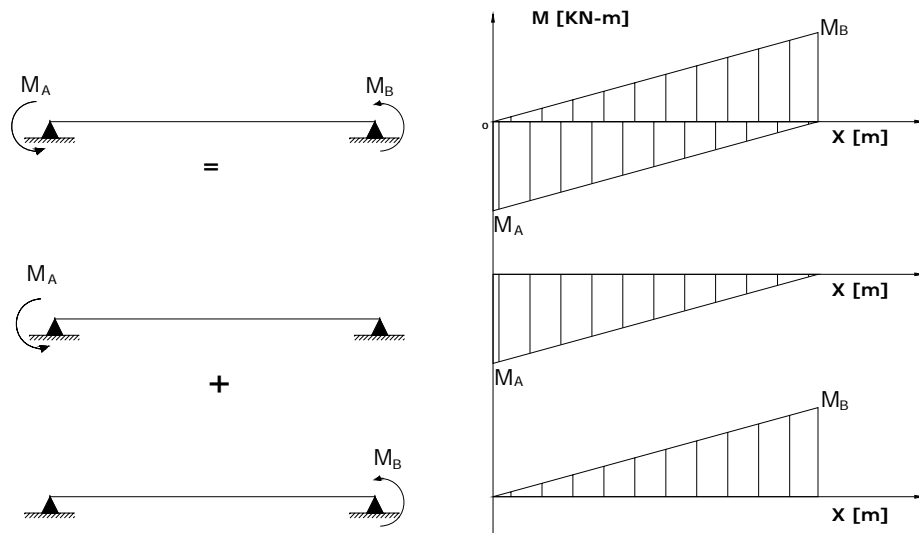
### Ejercicio 1.4

Una viga doblemente empotrada sufre un asentamiento ( $\Delta$ ) en su extremo B. Encontrar el valor de los momentos extremos  $M_A$ ,  $M_B$  y de las reacciones  $R_A$  y  $R_B$  generados en la viga.

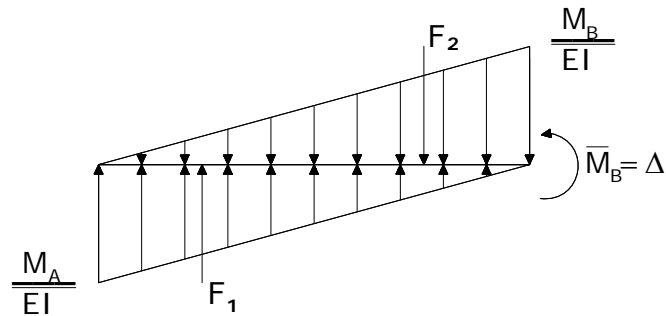


Cuando uno de los apoyos sufre un asentamiento, se generan momentos y reacciones en los extremos de la viga.

Para analizar este problema es necesario realizar un diagrama de cuerpo libre y desglosar la viga en una suma de efectos para encontrar la carga de la viga conjugada. Obsérvese que la viga no posee rotaciones en los extremos, pero sí presenta un desplazamiento (relativo).



Procedemos a cargar la viga conjugada con el diagrama de momentos dividido por  $EI$ . La viga conjugada no se encuentra apoyada en ningún sitio, por lo tanto no presenta reacciones pero si presenta momento  $M'b$ , el cual se encuentra simbolizado por delta (que corresponde al desplazamiento de la viga real).  $\overline{M}_B = \Delta$



$$\sum Fy = F_1 - F_2 = 0$$

$$\sum Fy = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_A \cdot L}{EI} - \frac{1}{2} \cdot \frac{M_B \cdot L}{EI} = 0$$

$$M_A = M_B$$

Como se puede ver, los momentos extremos son iguales. Ahora para conocer el valor de los momentos  $M_A$  y  $M_B$  en función del desplazamiento  $\Delta$ , se plantea una sumatoria de momentos de toda la viga con respecto al punto B:

$$\sum M_B = -F_1 \cdot \left(\frac{2}{3}L\right) + F_2 \cdot \left(\frac{1}{3}L\right) + \overline{M_B} = 0$$

$$\sum M_B = -\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{M_A \cdot L}{EI}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}L\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{M_B \cdot L}{EI}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}L\right) + \overline{M_B} = 0$$

Recordando que  $\overline{M_B} = \Delta$  y  $M_A = M_B$ , se tiene que:

$$-\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{M_A \cdot L^2}{EI}\right) + \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{M_A \cdot L^2}{EI}\right) + \Delta = 0$$

Despejando  $M_A$ , se encuentra que:

$$-\left(\frac{1}{6} \cdot \frac{M_A \cdot L^2}{EI}\right) + \Delta = 0$$

$$M_A = \frac{6 \cdot EI}{L^2} \cdot \Delta$$

Y por consiguiente:

$$M_B = \frac{6 \cdot EI}{L^2} \cdot \Delta$$

- Cálculo de las reacciones  $R_A$  y  $R_B$ :

Una vez conocidos los valores de los momentos extremos de la viga real, simplemente aplicaremos la estática básica para encontrar el valor de las reacciones:

$$\sum M_B = -R_A \cdot L + M_A + M_B = 0$$

$$R_A = \frac{M_A + M_B}{L} = \frac{2 \cdot M_A}{L}$$

$$R_A = \frac{2 \cdot \left( \frac{6 \cdot EI}{L^2} \cdot \Delta \right)}{L} = \frac{12 \cdot EI}{L^3} \cdot \Delta \uparrow$$

- $\sum F_y = R_A - R_B = 0$

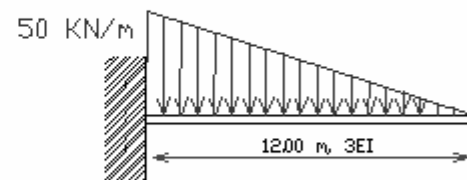
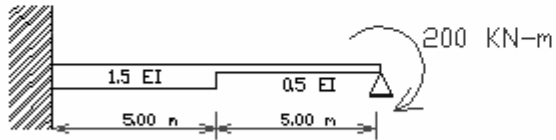
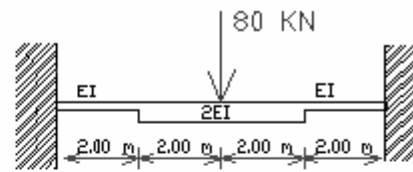
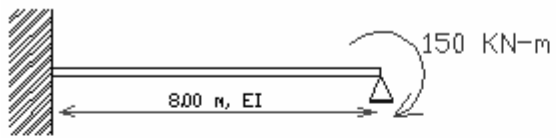
$$R_B = \frac{12 \cdot EI}{L^3} \cdot \Delta \downarrow$$

Para evitar confusión en la interpretación de los signos se debe tener en cuenta que el valor delta es positivo de abajo hacia arriba.

### **EJERCICIOS PROPUESTOS:**

En los siguientes ejercicios calcular deflexiones máximas, rotaciones, momentos y reacciones mediante el método de la viga

conjugada:



$$EI = 20.000 \text{ kN-m}^2$$



## **2. “SLOPE – DEFLECTION”**

### **2.1 Introducción**

El profesor George A. Maney presentó en 1915 el método del análisis de estructuras Slope-deflection en una publicación sobre ingeniería estructural de la universidad de Minesota. Su trabajo fue una extensión de estudios anteriores acerca de esfuerzos secundarios realizados por Heinrich Manderla y Otto Mohr entre los años 1880-1900. Su popularidad se mantuvo entre los ingenieros de la época por casi 15 años hasta la aparición de el método de distribución de momentos (método de Cross).

Este método permite conocer los momentos en los extremos de las barras que conforman una estructura mediante la solución de un sistema de ecuaciones que tiene en cuenta los desplazamientos y las rotaciones en los nodos. También es importante tener en cuenta que este método sólo es aplicable a estructuras con nodos rígidos como es el caso de las vigas continuas y pórticos rígidos, ya que no se considera el efecto de deformaciones por carga axial que son las que se producen en las cerchas.

Hoy día, este método en su forma convencional es poco útil debido a los programas tan avanzados de análisis de estructuras que existen en la actualidad. Sin embargo se sigue considerando como uno de los métodos de desplazamiento más importante de acuerdo con las siguientes consideraciones:

- Para algunos sistemas estructurales simples (vigas, marcos rígidos) el método puede presentar una solución rápida y practica.
- Las ecuaciones fundamentales del método sirven de base para el desarrollo del método de distribución de momentos.

- Las ecuaciones fundamentales del método establecen la base de introducción de métodos de formulación matricial.

## **2.2 SUPOSICIONES BÁSICAS DEL MÉTODO:**

- Todos los miembros de la estructura son prismáticos (  $E I$  constantes ).
- Las deformaciones de la estructura son debidas principalmente al efecto de los momentos.
- La estructura se comporta en el rango elástico (obedece a la *ley de Hooke*).
- Las deformaciones producidas por fuerzas axiales y cortantes son despreciadas.

### **2.2.1 Convenciones:**

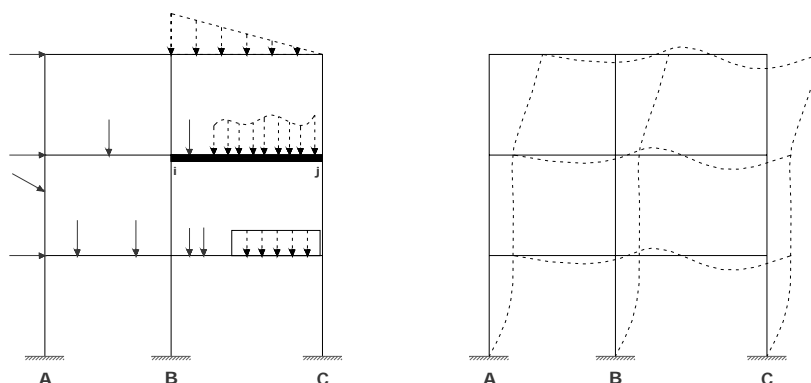
- Los momentos en los nodos en sentido de las manecillas del reloj son negativos.
- Las rotaciones de los nodos en sentido anti-horario son positivos.

## **2.3 DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES DEL SLOPE-DEFLECTION:**

Imagine un pórtico el cual ha sido sometido a un sistema de cargas cualquiera: *peso propio, carga viva, fuerza de sismo, viento, etc.*

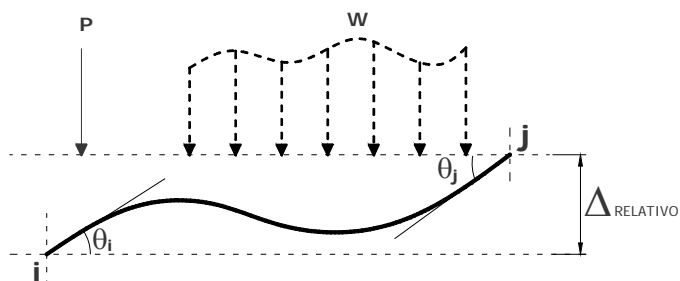
Como resultado de la aplicación de este sistema de cargas la estructura sufre deformaciones (rotaciones y desplazamientos) en los nodos y a su vez se generan fuerzas en cada uno de los elementos de la estructura.

**Figura 7:** Pórtico Sometido a un Sistema de Cargas



Tomando el elemento  $i-j$  del sistema pórtico después de deformado se tiene:

**Figura 8:** Análisis del Elemento  $i-j$



Para el análisis de este elemento se hace uso de la ecuación básica usada en el análisis matricial de estructuras:

$$[F_T] = [F_{\text{empotramiento}}] + [F_{\text{desplazamientos}}] \quad \text{Ecuación 2.1}$$

Donde:

$F_T$  = Fuerzas finales en los extremos de la barra.

$F_{empotramiento}$  = Fuerzas generadas en los extremos de la barra  $i-j$  debido a las cargas externas  $(P, W)$  actuantes sobre la barra. En este caso se restringen los desplazamientos de los nodos y se puede representar por medio del comportamiento de los extremos.

$F_{desplazamientos}$  = Fuerzas generadas en el elemento debidas a los desplazamientos de la barra.

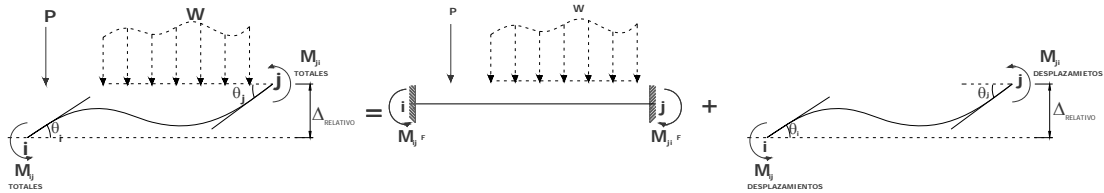
Como se mencionó al inicio del presente capítulo, el método del Slope-deflection desprecia las deformaciones debidas a las fuerzas axiales y cortantes en los elementos, teniendo solamente en cuenta las deformaciones por flexión (momentos).

Así, la ecuación básica en el análisis matricial aplicada al método del Slope-deflection queda convertida en:

$$\begin{matrix} [F_{TOTALES}] & = & [F_{emp}] & + & [F_{des}] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{matrix}$$

**Ecuación 2.2**

$$[M_{TOTALES}] = [M_{emp}] + [M_{desplazamiento}]$$



$[M_{TOTALES}]$  = Momentos totales generados en los extremos de la barra.

$\left[ M_{empotramientos} \right]$  = Momentos generados en los extremos de la barra por cargas externas  $(P, W)$  actuantes sobre la barra  $i - j$  cuando todos los desplazamientos son iguales a cero, es decir, la barra está empotrada.

$\left[ M_{desplazamientos} \right]$  = Fuerzas generadas en elementos debidas a los desplazamientos  $(\theta_i, \theta_j, \Delta \text{ relativo})$ .

A continuación se estudian los momentos de empotramiento y los momentos debidos a los desplazamientos.

### 2.3.1 Momentos de empotramiento

$\left[ M_{empotramientos} \right]$ : Como ya se mencionó anteriormente, los momentos de empotramiento son los que se generan en los nodos de la barra debido a las cargas  $(P, W)$  externas aplicadas sobre ella.

$M_{ij}^F$  = Momento generado en el nodo  $j$  de la barra  $ij$  debido a  $(P, W)$ .

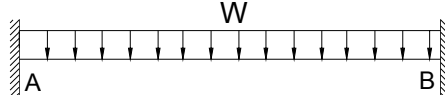
$M_{ji}^F$  = Momento generado en el nodo  $j$  de la barra  $ij$  debido a  $(P, W)$ .

Los momentos de empotramiento se calculan:

- Usando un método de análisis de estructuras como: Área momento, castigliano, carga unitaria, viga conjugada entre otros.

A manera de ejemplo, se calculan los momentos de empotramiento de la siguiente viga usando el método de castigliano.

**Figura 9:** Viga Cargada



Se consideran como redundantes las reacciones del extremo B ( $M_B, R_B$ ). Las condiciones en el nodo B son tales que:

$$\theta_B = 0 \quad \mathbf{y} \quad \Delta_B = 0$$

Luego:

$$\theta_B = \int_0^L \left[ \frac{M}{E \cdot I} \cdot \frac{\partial M}{\partial M_B} \right] dx = 0 \quad \text{Ecuación 2.3}$$

$$\Delta_B = \int_0^L \left[ \frac{M}{E \cdot I} \cdot \frac{\partial M}{\partial R_B} \right] dx = 0 \quad \text{Ecuación 2.4}$$

Planteando la ecuación de momentos para la viga se tiene:

$$\sum M_0 = M_{(x)} - M_B - \frac{W \cdot x^2}{2} + (R_B \cdot x) = 0$$

$$M_{(x)} = M_B + \frac{W \cdot x^2}{2} - (R_B \cdot x) \quad \text{Ecuación 2.5}$$

Derivando la ecuación de momento con respecto a cada una de las redundantes:

$$\frac{\partial M_{(x)}}{\partial M_B} = 1 \quad \frac{\partial M_{(x)}}{\partial R_B} = -x$$

- Para el caso de  $\theta_B$ :

$$\theta_B = 0 = \int_0^L \left[ \frac{M}{E \cdot I} \cdot \frac{\partial M}{\partial M_B} \right] dx = \int_0^L \left[ \frac{W \cdot x^2}{2} + M_B - R_B \cdot x \right] \cdot [1] dx$$

$$0 = \frac{W \cdot x^3}{6} + M_B \cdot x - \frac{R_B \cdot x^2}{2} \Big|_0^L$$

$$0 = \frac{W \cdot L^3}{6} + M_B \cdot L - \frac{R_B \cdot L^2}{2}$$

**Ecuación 2.6**

Despejando  $R_B$  de la anterior ecuación se tiene:

$$R_B = \frac{2 \cdot M_B}{L} + \frac{W \cdot L}{3}$$

**Ecuación 2.7**

- Para el caso de  $\Delta_B$ :

$$\Delta_B = 0 = \int_0^L \left[ \frac{M}{E \cdot I} \cdot \frac{\partial M}{\partial R_B} \right] dx = \int_0^L \left[ -\frac{W \cdot x^2}{2} - M_B + R_B \cdot x \right] \cdot [-x] dx$$

$$0 = \frac{R_B \cdot x^3}{3} - \frac{W \cdot x^4}{8} - \frac{M_B \cdot x^2}{2} \Big|_0^L$$

$$0 = \frac{R_B \cdot L^3}{3} - \frac{W \cdot L^4}{8} - \frac{M_B \cdot L^2}{2}$$

**Ecuación 2.8**

Despejando  $R_B$  de la anterior ecuación se tiene:

$$R_B = \frac{3}{8}(W \cdot L) + \frac{3}{2}(M_B \cdot L^2)$$

**Ecuación 2.9**

Igualando las ecuaciones 2.7 y 2.9 se encuentra el valor de  $M_B$ :

$$\frac{3 \cdot W \cdot L}{8} + \frac{3 \cdot M_B \cdot L^2}{2} = \frac{2 \cdot M_B}{L} + \frac{W \cdot L}{3}$$

$$M_B = \frac{W \cdot L^2}{12}$$

**Ecuación 2.10**

Reemplazando la ecuación 2.10 en cualquiera de las expresiones de  $R_B$  se obtiene:

$$R_B = \frac{W \cdot L}{2} \quad \text{Ecuación 2.11}$$

Una vez conocidos los valores de las reacciones en el nodo se plantea la estática de la viga, obteniendo el valor de las reacciones del nodo A:

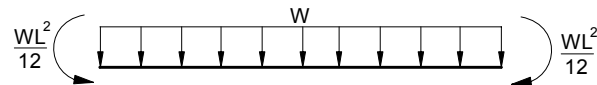
$$M_A = \frac{W \cdot L^2}{12} \quad \text{Ecuación 2.12}$$

$$R_A = \frac{W \cdot L}{2} \quad \text{Ecuación 2.13}$$

Así, los momentos de empotramiento para una viga de sección constante y con una carga constante sobre toda la viga son:

$$M_{ij}^F = -M_{ji}^F = \frac{W \cdot L^2}{12} \quad \text{Ecuación 2.14}$$

**Figura 10:** Momentos de Empotramiento



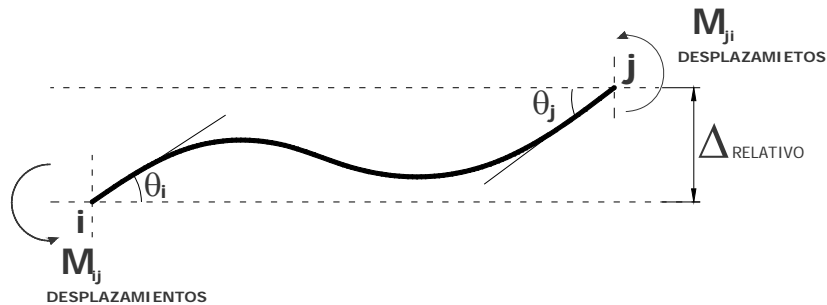
- Por medio de tablas de cálculo de momentos, las cuales muestran un gráfico de la viga con el sistema de carga y el valor de los momentos en función de las cargas ( $P, W$ ) actuantes en la barra y la longitud de la barra.

### 2.3.2 Momentos generados por desplazamientos



Ahora se estudian los momentos debidos a desplazamientos  $[M_{desplazamientos}]$ .

**Figura 11:** Momentos de Empotramiento



Como se puede ver en la figura anterior, los momentos generados en los extremos de la barra se producen por 3 desplazamientos.

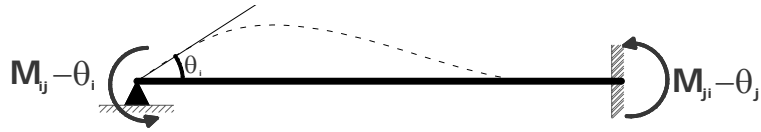
- Rotación del nodo  $i$  ( $\theta_i$ )
- Rotación del nodo  $j$  ( $\theta_j$ )
- Desplazamiento relativo entre nodos ( $\Delta_{relativo}$ )

A continuación se analiza cada desplazamiento por separado.

### 2.3.2.1. Momentos generados en los extremos de la barra $i-j$ por una rotación en el nodo $i(\theta_i)$ .

Para encontrar la relación existente entre los momentos generados en los extremos de la barra y la rotación ocurrida en el nodo  $i(\theta_i)$ , considérese una barra  $i-j$  simplemente apoyada en su extremo  $i$  y empotrada en su extremo  $j$ , la cual ha sufrido una rotación en su extremo  $i$  como se muestra a continuación:

**Figura 12:** Rotación en el nodo  $i$  de la barra  $i-j$



$M_{ij-\theta_i}$  = Momento generado en el nodo  $i$  debido a una rotación en el nodo  $i(\theta_i)$ .

$M_{ji-\theta_i}$  = Momento generado en el nodo  $j$  debido a una rotación en el nodo  $i(\theta_i)$ .

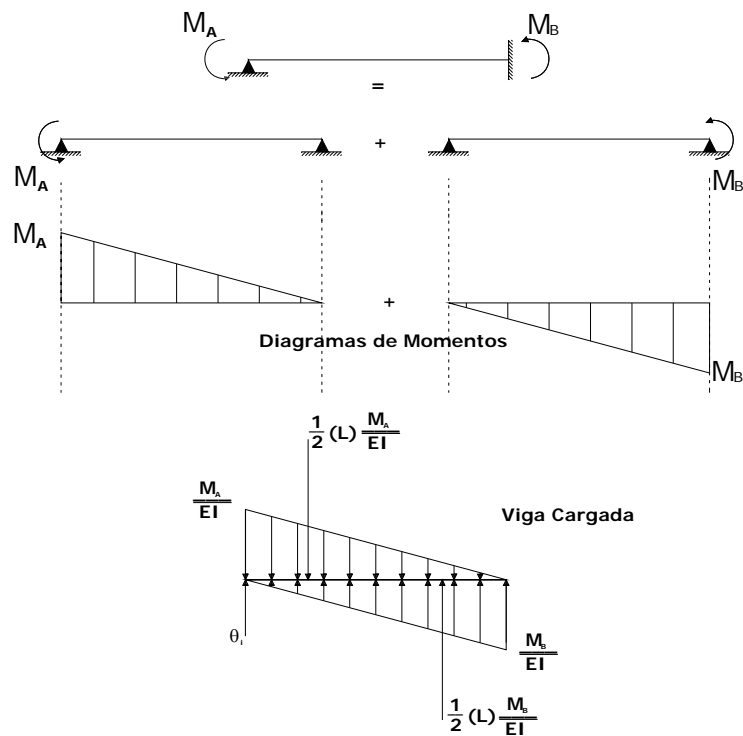
A continuación se hace uso del teorema de la viga conjugada para calcular el valor de los momentos  $M_{ij-\theta_i}$  y  $M_{ji-\theta_i}$  en función de la rotación  $(\theta_i)$ .

Para no saturar el dibujo y evitar posibles confusiones, se usa la siguiente convención:

$$M_{ij-\theta_i} = M_A$$

$$M_{ji-\theta_i} = M_B$$

**Figura 13:** Diagrama de Momentos de la Viga Cargada



Planteando una sumatoria de momentos en el nodo i, se tiene:

$$\sum M_i = 0$$

$$\left( \frac{1}{2} \cdot \frac{M_B \cdot L}{EI} \right) \cdot \left( \frac{2}{3} L \right) - \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{M_A \cdot L}{EI} \right) \cdot \left( \frac{1}{3} L \right) = 0$$

$$M_A = 2M_B$$

Ahora haciendo una sumatoria de fuerzas en y usando la anterior relación:

$$\sum F_y = 0$$

$$-\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{M_A L}{EI}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{M_B L}{EI}\right) + \theta_i = 0$$

$$-\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{M_A L}{EI}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(M_A/2)L}{EI}\right) + \theta_i = 0$$

$$-\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{M_A L}{EI}\right) + \theta_i = 0$$

Despejando  $M_A$ , se obtiene:

$$M_A = \frac{4EI}{L} \theta_i \quad \text{Ecuación 2.15}$$

Y por consiguiente:

$$M_B = \frac{2EI}{L} \theta_i \quad \text{Ecuación 2.16}$$

Luego

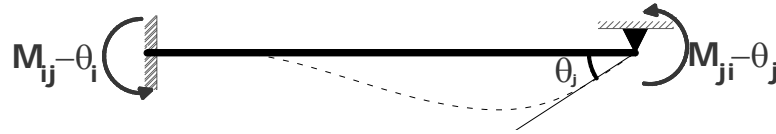
$$M_{ij-\theta_i} = \frac{4EI}{L} \theta_i \quad \text{Ecuación 2.17}$$

$$M_{ji-\theta_i} = \frac{2EI}{L} \theta_i \quad \text{Ecuación 2.18}$$

**2.3.2.2 Momentos generados en los extremos de la barra  $i-j$  por una rotación en el nodo  $j(\theta_j)$ .**

Para encontrar la relación existente entre los momentos generados en los extremos de la barra y la rotación ocurrida en el nodo  $j(\theta_j)$  se considera una barra  $i-j$  empotrada en su extremo  $i$  y simplemente apoyada en su extremo  $j$ , la cual ha sufrido una rotación en su extremo  $j$  como se muestra a continuación:

**Figura 14:** Rotación en el nodo  $j$  de la barra  $i-j$



$M_{ij-\theta_j}$  = Momento generado en el nodo  $i$  debido a una rotación en el nodo  $j(\theta_j)$ .

$M_{ji-\theta_j}$  = Momento generado en el nodo  $j$  debido a una rotación en el nodo  $j(\theta_j)$

Realizando el mismo análisis que se hizo para el caso de la rotación en el nodo  $i$ , se obtiene:

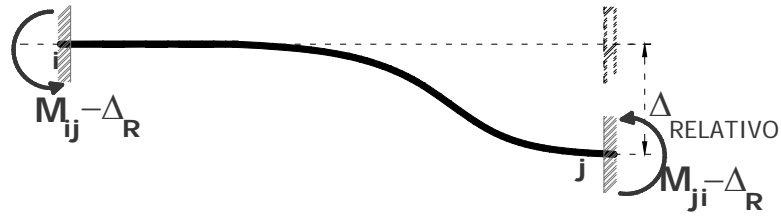
$$M_{ij-\theta_j} = \frac{2EI}{L} \theta_j \quad \text{Ecuación 2.19}$$

$$M_{ji-\theta_j} = \frac{4EI}{L} \theta_j \quad \text{Ecuación 2.20}$$

**2.3.2.3. Momentos generados en los extremos de la barra  $i-j$  por un desplazamiento relativo  $(\Delta_R)$ .**

Para encontrar la relación existente entre los momentos generados en los extremos de la barra y el desplazamiento relativo ( $\Delta_R$ ) entre nodos se considera una barra  $i-j$  empotrada en sus dos extremos, la cual ha sufrido un descenso vertical en uno de sus apoyos como se muestra a continuación:

**Figura 15:** Desplazamiento Relativo entre nodos de la barra  $i-j$



$M_{ij-\Delta_R}$  = Momento generado en el nodo  $i$  debido al desplazamiento relativo ( $\Delta_R$ ).

$M_{ji-\Delta_R}$  = Momento generado en el nodo  $j$  debido al desplazamiento relativo ( $\Delta_R$ ).

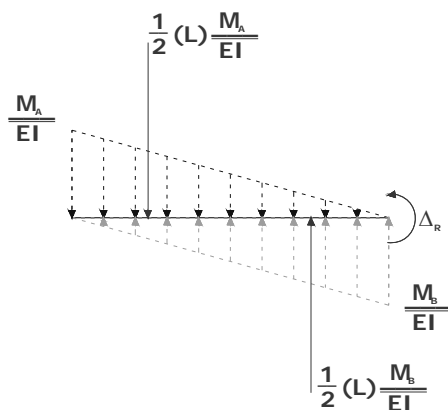
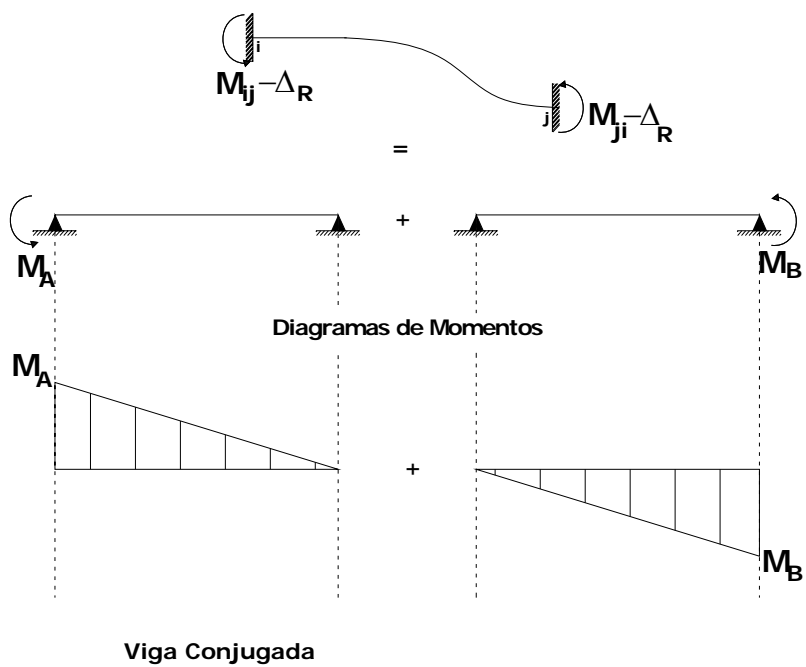
Nuevamente se hará uso del método de la viga conjugada para calcular el momento en función del desplazamiento relativo entre los extremos del elemento.

Para no saturar el dibujo y evitar posibles confusiones se usa la siguiente convención:

$$M_{ij-\Delta_R} = M_A$$

$$M_{ji-\Delta_R} = M_B$$

**Figura 16:** Cálculo de Momentos debidos al desplazamiento Relativo entre nodos



Haciendo sumatoria de fuerzas en y:

$$\sum F_y = 0$$

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{M_A \cdot L}{EI} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{M_B \cdot L}{EI} \right) = 0$$

$$M_A = M_B$$

**Ecuación 2.21**

Ahora, planteando una sumatoria de momentos con respecto al nodo j:

$$\sum M_j = 0$$

$$\left( \frac{M_A \cdot L}{2EI} \right) \left( \frac{2}{3}L \right) - \left( \frac{M_B \cdot L}{2EI} \right) \left( \frac{1}{3}L \right) - \Delta_R = 0$$

$$\frac{M_A \cdot L^2}{3EI} - \frac{M_B \cdot L^2}{6EI} = \Delta_R$$

$$\frac{M_A \cdot L^2}{6EI} = \Delta_R$$

Despejando  $M_A$ :

$$M_A = \frac{6EI}{L^2} \cdot \Delta_R$$

**Ecuación 2.22**

Y por consiguiente:

$$M_B = \frac{6EI}{L^2} \cdot \Delta_R$$

**Ecuación 2.23**

Luego:

$$M_{ij-\Delta_R} = \frac{6EI}{L^2} \cdot \Delta_R$$

**Ecuación 2.24**

$$M_{ji-\Delta_R} = \frac{6EI}{L^2} \cdot \Delta_R$$

**Ecuación 2.25**



**Importante:**

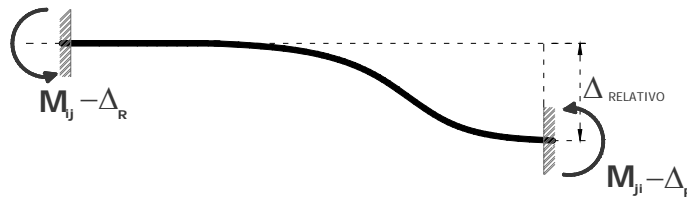
El signo del momento varía, dependiendo si el desplazamiento relativo hace girar la barra en sentido horario ó anti-horario.

En el desarrollo de este capítulo se plantea la siguiente convención para determinar el signo del momento debido al  $\Delta_R$ .

**Caso A.**

Si el desplazamiento relativo  $\Delta_R$  hace que la barra tienda a rotar en sentido de las manecillas del reloj, los momentos en los extremos son positivos.

**Figura 17:** Rotación de la barra en sentido de las manecillas del reloj



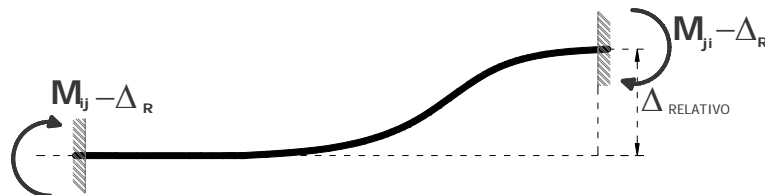
$$M_{ij-\Delta_R} = M_{ji-\Delta_R} = \frac{6EI}{L^2} \Delta_R$$

**Ecuación 2.26**

**Caso B.**

Si el desplazamiento relativo  $\Delta_R$  hace que la barra tienda a rotar en sentido anti-horario, los momentos en los extremos son negativos.

**Figura 18:** Rotación de la barra en sentido contrario a las manecillas del reloj



$$M_{ij-\Delta_R} = M_{ji-\Delta_R} = -\frac{6EI}{L^2}\Delta_R$$

**Ecuación 2.27**

Sumando los 3 efectos analizados se puede decir que:

- El momento generado en el nodo  $i$ , debido a los desplazamientos  $\theta_i, \theta_j$  y  $\Delta_R$  es igual a:

$$M_{ij \text{ desplazamientos}} = (M_{ij-\theta_i}) + (M_{ij-\theta_j}) + (M_{ij-\Delta_R})$$

$$M_{ij \text{ desplazamientos}} = \frac{4EI}{L}\theta_i + \frac{2EI}{L}\theta_j \pm \frac{6EI}{L^2}\Delta_R$$

**Ecuación 2.28**

- El momento generado en el nodo  $j$ , debido a los desplazamientos  $\theta_i, \theta_j$  y  $\Delta_R$ , es igual a:

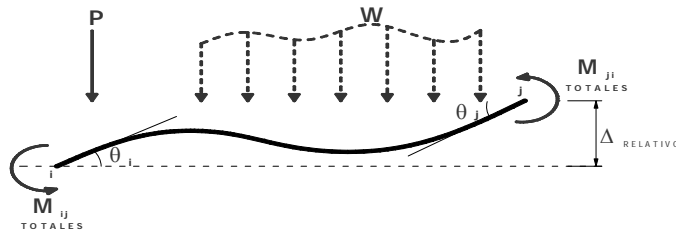
$$M_{ji \text{ desplazamientos}} = (M_{ji-\theta_i}) + (M_{ji-\theta_j}) + (M_{ji-\Delta_R})$$

$$M_{ji \text{ desplazamientos}} = \frac{2EI}{L}\theta_i + \frac{4EI}{L}\theta_j \pm \frac{6EI}{L^2}\Delta_R$$

**Ecuación 2.29**

### **Momentos totales**

**Figura 19:** Cálculo de momentos totales



Retomando la ecuación

$$M_{TOTALES} = M_{empotramiento} + M_{desplazamientos}$$

Y aplicándola al nodo  $i$  de la barra i-j, se tiene:

$$M_{ij\ Total} = M_{ij}^F + M_{ij\ desplazamientos}$$

$$M_{ij\ Total} = M_{ij}^F + (M_{ij-\theta_i}) + (M_{ij-\theta_j}) + (M_{ij-\Delta_R})$$

$$M_{ij} = M_{ij}^F + \frac{4EI}{L}\theta_i + \frac{2EI}{L}\theta_j \pm \frac{6EI}{L^2}\Delta_R$$

**Ecuación 2.30**

Y lo mismo se hace en el nodo  $j$ , obteniendo:

$$M_{ji\ Total} = M_{ji}^F + (M_{ji-\theta_i}) + (M_{ji-\theta_j}) + (M_{ji-\Delta_R})$$

$$M_{ji} = M_{ji}^F + \frac{2EI}{L}\theta_i + \frac{4EI}{L}\theta_j \pm \frac{6EI}{L^2}\Delta_R$$

Ecuación 2.31

Siendo estas las ecuaciones básicas usadas en el método del Slope-deflection para una barra i-j de sección constante:

$$M_{ij} = M_{ij}^F + \frac{4EI}{L}\theta_i + \frac{2EI}{L}\theta_j \pm \frac{6EI}{L^2}\Delta_R$$

Ecuación 2.30

$$M_{ji} = M_{ji}^F + \frac{2EI}{L}\theta_i + \frac{4EI}{L}\theta_j \pm \frac{6EI}{L^2}\Delta_R$$

Ecuación 2.31

## 2.4 PLANTEAMIENTO GENERAL DEL MÉTODO DEL SLOPE-DEFLECTION:

Para solucionar estructuras haciendo uso del Slope-deflection se siguen los siguientes pasos:

a. Aplicar las ecuaciones básicas de momento del Slope a cada una de las barras de la estructura. Estos momentos quedan en función de las rotaciones en los extremos y de los desplazamientos relativos entre los extremos de cada barra.

b. Plantear una ecuación de equilibrio de momentos en cada uno de los nodos de la estructura. En algunas estructuras es necesario plantear ecuaciones de equilibrio en algunos elementos o en toda la estructura, como se verá mas adelante en los ejercicios tipo.

Al establecer todas las ecuaciones de equilibrio necesarias se obtiene un sistema de ecuaciones, el cual debe tener igual número de ecuaciones como grados de libertad desconocidos tenga la estructura. Al solucionar este sistema se consiguen los valores de las rotaciones en los extremos  $\theta$  y de los desplazamientos relativos  $\Delta$ .

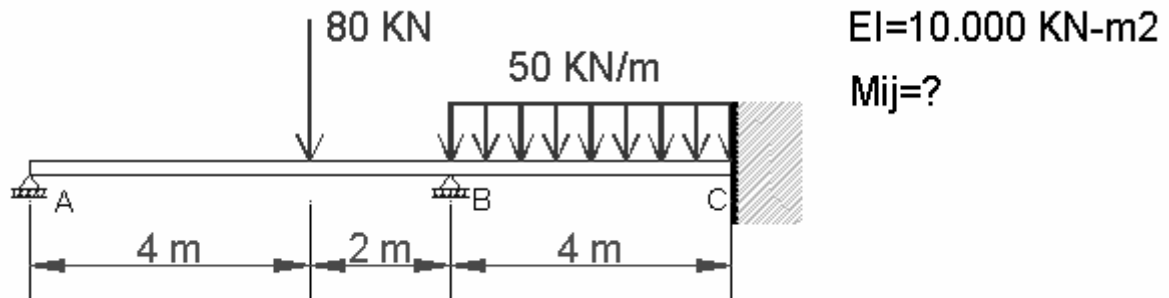
c. Conocidos los valores de  $\theta$  y de  $\Delta_R$ , estos se sustituyen en las ecuaciones de momentos finales planteadas en el paso a.

d. Calculados los momentos, se pueden obtener los cortantes y las reacciones haciendo uso de la estática básica.

### 2.4.1 Aplicación del Slope Deflection en Vigas

#### Ejemplo 2.1

Calcular los momentos en los extremos de las barras A-B y B-C de la siguiente viga, mediante las ecuaciones del Slope-deflection.



Para dar solución a la viga propuesta, se aplican las ecuaciones básicas del Slope a cada una de las barras de la estructura. Como la estructura no presenta desplazamientos relativos en ninguno de los apoyos, el último término de las ecuaciones no se tiene en cuenta.

Las ecuaciones para cada barra son:

$$M_{ij} = M_{ij}^F + \frac{4EI}{L} \theta_i + \frac{2EI}{L} \theta_j$$

$$M_{ji} = M_{ji}^F + \frac{2EI}{L} \theta_i + \frac{4EI}{L} \theta_j$$

- **Cálculo de Momentos de empotramiento**

Considerando todos los nodos de la estructura empotrados se calculan los momentos de empotramiento para cada una de las barras:

$$M_{AB}^F = \frac{P \cdot a \cdot b^2}{L^2} = \frac{80 \cdot 4 \cdot 2^2}{6^2} = 35.55 \text{ KN-m}.$$

$$M_{BA}^F = -\frac{P \cdot a^2 \cdot b}{L^2} = -\frac{80 \cdot 4^2 \cdot 2}{6^2} = -71.11 \text{ KN} - m.$$

$$M_{BC}^F = -M_{CB}^F = \frac{W \cdot L^2}{12} = \frac{50 \times 4^2}{12} = 66.67 \text{ KN} - m.$$

Reemplazando los valores en las ecuaciones se tiene:

$$M_{AB} = 35.55 + \frac{4 \times 10000}{6} \cdot \theta_A + \frac{2 \times 10000}{6} \cdot \theta_B$$

$$M_{BA} = -71.11 + \frac{2 \times 10000}{6} \cdot \theta_A + \frac{4 \times 10000}{6} \cdot \theta_B$$

$$M_{BC} = 66.67 + \frac{4 \times 10000}{4} \cdot \theta_B + \frac{2 \times 10000}{4} \cdot \theta_C$$

$$M_{CB} = -66.67 + \frac{2 \times 10000}{4} \cdot \theta_B + \frac{4 \times 10000}{4} \cdot \theta_C$$

Evaluando cada uno de los valores de las ecuaciones, se obtiene:

$$M_{AB} = 35.55 + 6666.67 \cdot \theta_A + 3333.33 \cdot \theta_B$$

$$M_{BA} = -71.11 + 3333.33 \cdot \theta_A + 6666.67 \cdot \theta_B$$

$$M_{BC} = 66.67 + 10000 \cdot \theta_B + 5000 \cdot \theta_C$$

$$M_{CB} = -66.67 + 5000 \cdot \theta_B + 10000 \cdot \theta_C$$

Las condiciones de apoyo de la estructura son tales que:

$$\theta_A = \text{desconocido}$$

$$\theta_B = \text{desconocido}$$

$$\theta_C = 0 \text{ (empotramiento del nodo)}$$

Teniendo en cuenta las anteriores consideraciones, las ecuaciones quedan convertidas en:

$$M_{AB} = 35.55 + 6666.67 \cdot \theta_A + 3333.33 \cdot \theta_B \quad (1)$$

$$M_{BA} = -71.11 + 3333.33 \cdot \theta_A + 6666.67 \cdot \theta_B \quad (2)$$

$$M_{BC} = 66.67 + 10000 \cdot \theta_B \quad (3)$$

$$M_{CB} = -66.67 + 5000 \cdot \theta_B \quad (4)$$

Hasta este punto se tienen en el sistema 4 ecuaciones y 6 incógnitas ( $\theta_A, \theta_B, M_{AB}, M_{BA}, M_{BC}, M_{CB}$ ).

Planteando la condición de equilibrio ( $\sum M_i = 0$ ) en los nodos A y B, se tiene:

#### **Nodo A:**

$$\sum M_A = 0 = M_{AB}$$

$$M_{AB} = 0$$

Luego la ecuación (1) queda convertida en:

$$0 = 35.55 + 6666.67 \cdot \theta_A + 3333.33 \cdot \theta_B \quad (1)$$

#### **Nodo B:**

$$\sum M_B = 0 = M_{BA} + M_{BC}$$

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

Así, sumando las ecuaciones (2) y (3) se obtiene:

$$0 = -4.44 + 3333.33 \cdot \theta_A + 16666.67 \cdot \theta_B \quad (5)$$

Si se toman las ecuaciones (1) y (5) se tiene un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (  $\theta_A$  ,  $\theta_B$  ):

$$0 = 35.55 + 6666.67 \cdot \theta_A + 3333.33 \cdot \theta_B$$

$$0 = -4.44 + 3333.33 \cdot \theta_A + 16666.67 \cdot \theta_B$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$\theta_A = -6.072 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\theta_B = 1.481 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Reemplazando los valores de las rotaciones en las ecuaciones iniciales de momentos del ejercicio se encuentran los valores de los momentos extremos:

$$M_{AB} = 35.55 + 6666.67 \cdot (-6.072 \times 10^{-3}) + 3333.33 \cdot (1.481 \times 10^{-3}) = 0 \text{ kN} - m.$$

$$M_{BA} = -71.11 + 3333.33 \cdot (-6.072 \times 10^{-3}) + 6666.67 \cdot (1.481 \times 10^{-3}) = -81.48 \text{ kN} - m.$$

$$M_{BC} = 66.67 + 10000 \cdot (1.481 \times 10^{-3}) = 81.48 \text{ kN} - m.$$

$$M_{CB} = -66.67 + 5000 \cdot (1.481 \times 10^{-3}) = -59.27 \text{ kN} - m.$$

**Comprobación:**

$$\bullet \quad \sum M_A = M_{AB} = 0 \quad (\checkmark)$$

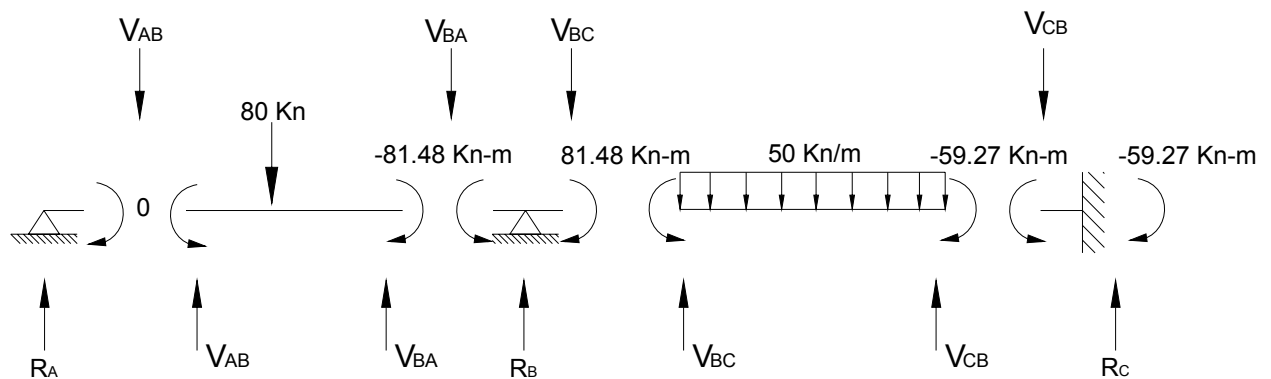


- $$\sum M_B = M_{BA} + M_{BC} = -81.48 + 81.48 = 0 \quad (\checkmark)$$

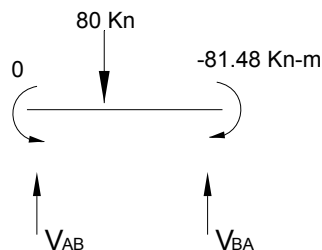
Esto se hace con el fin de verificar que la solución del sistema de ecuaciones se hizo de manera correcta

### Estática de la estructura:

Conocidos los momentos resultantes en los extremos de cada elemento se pueden calcular los cortantes para cada barra mediante las ecuaciones básicas de equilibrio ( $\sum M_i = 0$ ,  $\sum F = 0$ ), así como las reacciones en los nodos.



Barra AB:



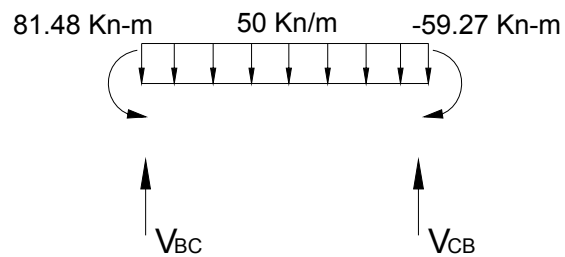
- $$\sum M_A = -81.48 - (80 \times 4) + 6 \cdot V_{BA} = 0$$

$$V_{BA} = 66.91 \text{ kN.}$$

- $$\sum F_Y = -80 + 66.91 + V_{AB} = 0$$

$$V_{AB} = 13.09 \text{ kN.}$$

Barra BC:



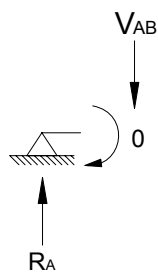
- $$\sum M_C = 81.48 - 59.27 - \left[ (50 \times 4^2) / 2 \right] + 4 \cdot V_{CB} = 0$$

$$V_{CB} = 94.45 \text{ kN.}$$
- $$\sum F_Y = -(50 \times 4) + 94.45 + V_{BC} = 0$$

$$V_{BC} = 105.55 \text{ kN.}$$

Calculo de reacciones:

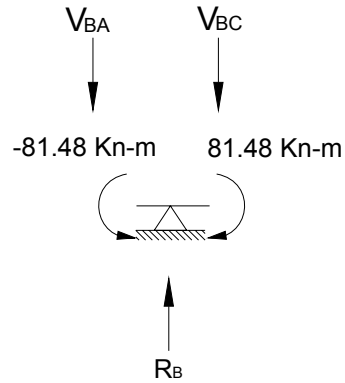
Nodo A



- $$\sum F_y = R_A - V_{AB} = 0$$

$$R_A = V_{AB} = 13.09 \text{ kN.}$$

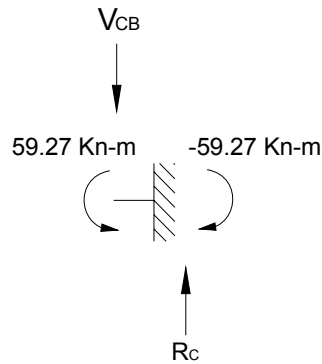
Nodo B



- $$\sum F_y = R_B - V_{BA} - V_{BC} = 0$$

$$R_B = 66.91 + 105.55 = 172.46 \text{ kN.}$$

Nodo C



- $$\sum F_y = R_C - V_{CB} = 0$$

$$R_C = V_{CB} = 94.45 \text{ kN.}$$

- $$\sum M_C = M_{CB} - M_C = 0$$

$$M_C = M_{C_B} = -59.27 \text{ kN-m.}$$

### Equilibrio de la estructura:

Para comprobar que los valores de las reacciones obtenidos para la estructura son los correctos se plantea su equilibrio:

- $$\sum M_A = -(80 \cdot 4) + (6 \cdot R_B) - [(50 \cdot 4) \cdot 8] + (10 \cdot R_C) + M_C$$

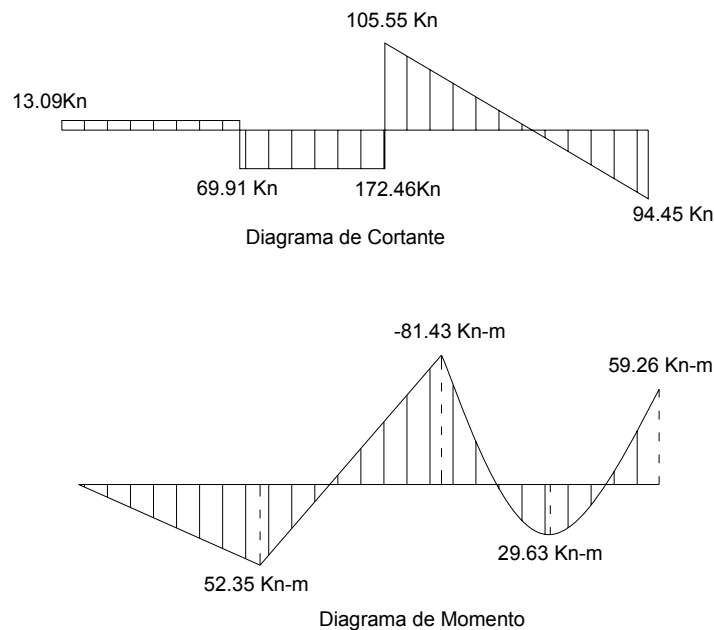
$$\sum M_A = -(320) + (1034.76) - (1600) + (944.5) - (59.27) = 0 \quad (\checkmark)$$
- $$\sum F_y = -80 - (50 \cdot 4) + R_A + R_B + R_C$$

$$\sum F_y = -80 - 200 + 13.09 + 172.46 + 94.45 = 0 \quad (\checkmark)$$

### Diagramas de la estructura:

A continuación se presentan los diagramas de cortante y momento para la anterior viga.

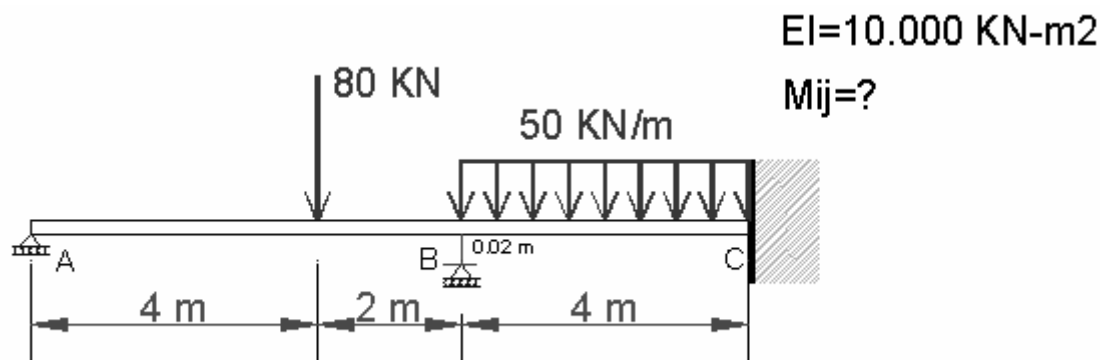
**Figura 20:** Diagramas de Cortante y de Momento de la Estructura



## Ejemplo 2.2

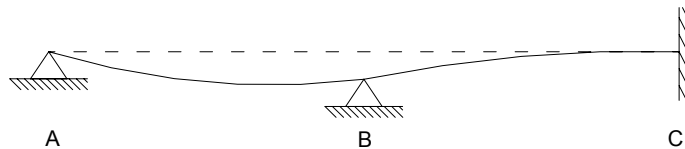
Calcular los momentos en los extremos de las barras A-B y B-C de la siguiente viga. Tenga en cuenta que se presenta un asentamiento ( $\Delta$ ) en el apoyo B con un valor de 2 centímetros.

Use el método del Slope-Deflection.



Este ejercicio es similar al anterior, pero se debe considerar el último término de la ecuación, ya que en este caso ocurre un desplazamiento relativo entre los nodos A y B así como entre los nodos B y C.

Es importante tener en cuenta el sentido del desplazamiento para poder determinar el signo que tendrá el término  $\frac{6EI}{L^2} \Delta_R$ .



Analizando la estructura después de ocurrido el asentamiento y haciendo uso de la convención propuesta en la sección 2.3.2.3 para determinar el signo del término del desplazamiento relativo, se ve que:

- La barra AB tiende a girar en sentido horario, luego el término  $\frac{6EI}{L^2} \Delta_R$  será positivo en las dos ecuaciones de momentos de la barra.
- La barra BC tiende a girar en sentido antihorario, luego el término  $\frac{6EI}{L^2} \Delta_R$  será negativo en las dos ecuaciones de momentos de la barra.

Ahora se puede encontrar las ecuaciones para cada barra:

$$M_{ij} = M_{ij}^F + \frac{4EI}{L} \theta_i + \frac{2EI}{L} \theta_j \pm \frac{6EI}{L^2} \Delta_R$$

$$M_{ji} = M_{ji}^F + \frac{2EI}{L} \theta_i + \frac{4EI}{L} \theta_j \pm \frac{6EI}{L^2} \Delta_R$$

- Cálculo de Momentos de empotramiento

Son los mismos valores encontrados para el ejemplo anterior.

$$M_{AB}^F = 35.55 \text{ KN} - m.$$

$$M_{BA}^F = -71.11 \text{ KN} - m.$$

$$M_{BC}^F = -M_{CB}^F = 66.67 \text{ KN} - m.$$

Reemplazando los valores tenemos:

$$M_{AB} = 35.55 + \frac{4 \times 10000}{6} \cdot \theta_A + \frac{2 \times 10000}{6} \cdot \theta_B + \frac{6 \times 10000}{6^2} \cdot (0.02)$$

$$M_{BA} = -71.11 + \frac{2 \times 10000}{6} \cdot \theta_A + \frac{4 \times 10000}{6} \cdot \theta_B + \frac{6 \times 10000}{6^2} \cdot (0.02)$$

$$M_{BC} = 66.67 + \frac{4 \times 10000}{4} \cdot \theta_B + \frac{2 \times 10000}{4} \cdot \theta_C - \frac{6 \times 10000}{4^2} \cdot (0.02)$$

$$M_{CB} = -66.67 + \frac{2 \times 10000}{4} \cdot \theta_B + \frac{4 \times 10000}{4} \cdot \theta_C - \frac{6 \times 10000}{4^2} \cdot (0.02)$$

Obsérvese que el signo del término  $\frac{6EI}{L^2} \Delta_R$  depende del sentido de rotación de la barra y no de que  $\Delta$  sea positivo o negativo.

Evaluando cada uno de los valores de las ecuaciones, se obtiene:

$$M_{AB} = 6666.67 \cdot \theta_A + 3333.33 \cdot \theta_B + 68.88$$

$$M_{BA} = 3333.33 \cdot \theta_A + 6666.67 \cdot \theta_B - 37.78$$

$$M_{BC} = 10000 \cdot \theta_B + 5000 \cdot \theta_C - 8.33$$

$$M_{CB} = 5000 \cdot \theta_B + 10000 \cdot \theta_C - 141.67$$

Las condiciones de apoyo de la estructura son tales que :

$$\theta_A = \text{desconocido}$$

$$\theta_B = \text{desconocido}$$

$$\theta_C = 0 \text{ (empotramiento del nodo)}$$

Así, las ecuaciones quedan convertidas en:

$$M_{AB} = 6666.67 \cdot \theta_A + 3333.33 \cdot \theta_B + 68.88 \quad (1)$$

$$M_{BA} = 3333.33 \cdot \theta_A + 6666.67 \cdot \theta_B - 37.78 \quad (2)$$

$$M_{BC} = 10000 \cdot \theta_B - 8.33 \quad (3)$$

$$M_{CB} = 5000 \cdot \theta_B - 141.67 \quad (4)$$

Nuevamente se presenta un sistema de 4 ecuaciones y las mismas 6 incógnitas del ejemplo anterior ( $\theta_A, \theta_B, M_{AB}, M_{BA}, M_{BC}, M_{CB}$ ).

Planteando la condición de equilibrio ( $\sum M_i = 0$ ) en los nodos A y B, se tiene:

Nodo A:

$$\sum M_A = 0 = M_{AB}$$

$$M_{AB} = 0$$

Luego la ecuación (1) queda convertida en:

$$0 = 6666.67 \cdot \theta_A + 3333.33 \cdot \theta_B + 68.88 \quad (1)$$

Nodo B:

$$\sum M_B = 0 = M_{BA} + M_{BC}$$

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

Sumando las ecuaciones (2) y (3) se obtiene:

$$0 = 3333.33 \cdot \theta_A + 16666.67 \cdot \theta_B - 46.11 \quad (5)$$

Si se toman las ecuaciones (1) y (5) se obtiene un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas ( $\theta_A, \theta_B$ ):



$$0 = 6666.67 \cdot \theta_A + 3333.33 \cdot \theta_B + 68.88$$

$$0 = 3333.33 \cdot \theta_A + 16666.67 \cdot \theta_B - 46.11$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$\theta_A = -13.0 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\theta_B = 5.37 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Reemplazando los valores de las rotaciones en las ecuaciones iniciales del ejercicio se encuentran los valores de los momentos:

$$M_{AB} = 0.1 \text{ kN} - m.$$

$$M_{BA} = -45.32 \text{ kN} - m.$$

$$M_{BC} = 45.36 \text{ kN} - m.$$

$$M_{CB} = -114.82 \text{ kN} - m.$$

Como se observa, el nodo A y el nodo B presentan errores de cierre, pero estos son aceptables comparados con la magnitud de los valores de los momentos.

- **Estática de la estructura:**

El calculo de los cortantes de las barras y de las reacciones de la estructura se hace de la misma forma como se desarrollo en el ejercicio anterior. Los resultados obtenidos son:

**Cortantes:**

$$V_{AB} = 19.11 \text{ kN}.$$

$$V_{BA} = 60.89 \text{ kN.}$$

$$V_{BC} = 140.05 \text{ kN.}$$

$$V_{CB} = 59.96 \text{ kN.}$$

### Reacciones:

$$R_A = 13.09 \text{ kN.}$$

$$R_B = 200.93 \text{ kN.}$$

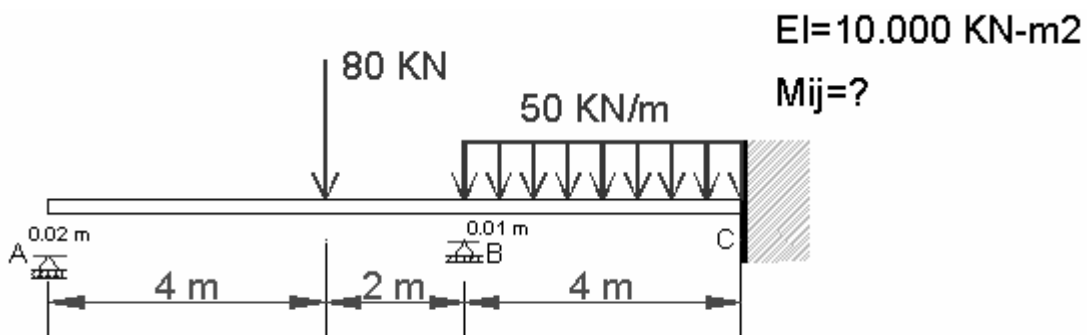
$$R_C = 59.96 \text{ kN.}$$

$$M_C = -114.82 \text{ kN-m.}$$

### Ejemplo 2.3.

Calcular los momentos en los extremos de las barras A-B y B-C de la siguiente viga. La estructura presenta un asentamiento ( $\Delta$ ) en el apoyo A de 3 centímetros y un asentamiento en el apoyo B de 1 centímetro.

Use el método del Slope-Deflection.



Al analizar la estructura después de ocurridos los asentamientos en los nodos, se puede ver que el desplazamiento relativo entre el nodo A y B es igual al asentamiento

que sufre el nodo A menos el asentamiento que sufre el nodo B. Escrito en forma de ecuación se tiene:

$$\Delta_{A-B} = \Delta_A - \Delta_B$$

$$\Delta_{A-B} = 3 \text{ cm.} - 1 \text{ cm.}$$

$$\Delta_{A-B} = 2 \text{ cm.} = 0.02 \text{ m.}$$

En el caso de la barra BC, el nodo B se asienta 1 cm., mientras que el nodo C permanece en su posición inicial.

$$\Delta_{B-C} = \Delta_B - \Delta_C$$

$$\Delta_{B-C} = 1 \text{ cm.} - 0.$$

$$\Delta_{B-C} = 1 \text{ cm.} = 0.01 \text{ m.}$$

Como se puede ver, las dos barras tienden a girar en sentido antihorario, luego el término  $\frac{6EI}{L^2} \Delta_R$  será negativo en las ecuaciones de cada barra.

El procedimiento de desarrollo es igual al planteado en los dos ejercicios anteriores.

- Planteando las ecuaciones para cada barra:

$$M_{AB} = 35.55 + \frac{4 \times 10000}{6} \cdot \theta_A + \frac{2 \times 10000}{6} \cdot \theta_B - \frac{6 \times 10000}{6^2} \cdot (0.02)$$

$$M_{BA} = -71.11 + \frac{2 \times 10000}{6} \cdot \theta_A + \frac{4 \times 10000}{6} \cdot \theta_B - \frac{6 \times 10000}{6^2} \cdot (0.02)$$

$$M_{BC} = 66.67 + \frac{4 \times 10000}{4} \cdot \theta_B - \frac{6 \times 10000}{4^2} \cdot (0.01)$$

$$M_{CB} = -66.67 + \frac{2 \times 10000}{4} \cdot \theta_B - \frac{6 \times 10000}{4^2} \cdot (0.01)$$

(Recordando,  $\theta_C = 0$  por el empotramiento.)

- Evaluando los términos de cada ecuación se obtiene:

$$M_{AB} = 6666.67 \cdot \theta_A + 3333.33 \cdot \theta_B + 2.22 \quad (1)$$

$$M_{BA} = 3333.33 \cdot \theta_A + 6666.67 \cdot \theta_B - 104.44 \quad (2)$$

$$M_{BC} = 10000 \cdot \theta_B - 29.17 \quad (3)$$

$$M_{CB} = 5000 \cdot \theta_B - 104.17 \quad (4)$$

- Planteando el equilibrio de momentos en los nodos A y B:

$$\sum M_A = M_{AB} = 0$$

$$\sum M_B = M_{BA} + M_{BC} = 0$$

Así, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$0 = 6666.67 \cdot \theta_A + 3333.33 \cdot \theta_B + 2.22$$

$$0 = 3333.33 \cdot \theta_A + 16666.67 \cdot \theta_B - 133.61$$

La solución de las ecuaciones anteriores es:

$$\theta_A = -4.82 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\theta_B = 8.98 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

- Reemplazando estos valores en las ecuaciones iniciales de momentos, se obtiene:

$$M_{AB} = 0 \text{ kN} - m.$$

$$M_{BA} = -60.64 \text{ kN} - m.$$

$$M_{BC} = 60.64 \text{ kN} - m.$$

$$M_{CB} = -59.27 \text{ kN} - m.$$

### Reacciones:

$$R_A = 16.56 \text{ kN}.$$

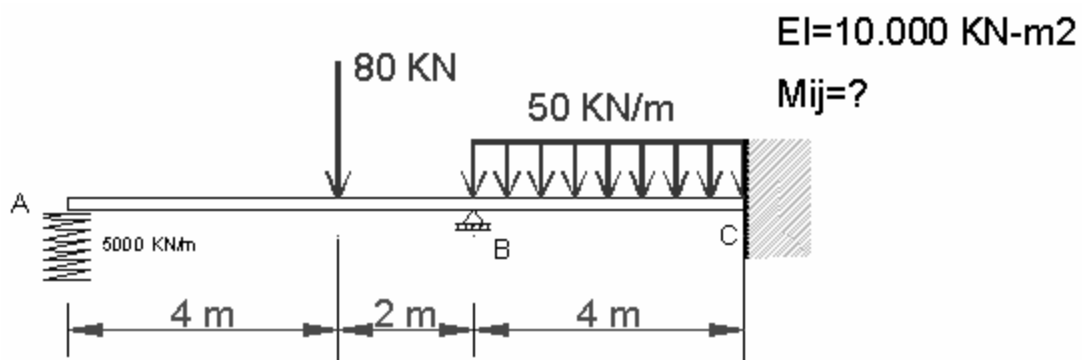
$$R_B = 163.78 \text{ kN}.$$

$$R_C = 99.66 \text{ kN}.$$

$$M_C = -59.27 \text{ kN} - m.$$

### Ejemplo 2.4.

Calcular los momentos en los extremos de las barras A-B y B-C de la siguiente viga. El apoyo A esta representado por un resorte con una rigidez de  $K = 5000 \text{ KN} / m$ .



En algunas ocasiones las estructuras civiles no presentan apoyos perfectamente rígidos, como se puede presentar al tener como apoyo un suelo compresible. Este tipo

de suelo puede presentar asentamientos diferenciales al ser sometido a cargas. Si se conocen las propiedades del suelo, su rigidez puede ser representada con un resorte de igual rigidez, es decir los resortes son idealizaciones que en el análisis estructural se pueden emplear para representar rigideces.

Como se pudo ver en el ejercicio 2 y 3, los asentamientos que sufrieron los apoyos, eran conocidos. En este ejercicio el asentamiento que ocurre en el apoyo A es desconocido, el nodo B permanece en su posición inicial, luego el desplazamiento relativo entre los dos nodos será ( $\Delta$ ).

- Planteando las ecuaciones de momento para cada barra:

$$M_{AB} = 35.55 + \frac{4 \times 10000}{6} \cdot \theta_A + \frac{2 \times 10000}{6} \cdot \theta_B - \frac{6 \times 10000}{6^2} \cdot \Delta$$

$$M_{BA} = -71.11 + \frac{2 \times 10000}{6} \cdot \theta_A + \frac{4 \times 10000}{6} \cdot \theta_B - \frac{6 \times 10000}{6^2} \cdot \Delta$$

$$M_{BC} = 66.67 + \frac{4 \times 10000}{4} \cdot \theta_B$$

$$M_{CB} = -66.67 + \frac{2 \times 10000}{4} \cdot \theta_B$$

(Recordando,  $\theta_C = 0$  por el empotramiento.)

- Evaluando los términos de cada ecuación se obtiene:

$$M_{AB} = 35.55 + 6666.67 \cdot \theta_A + 3333.33 \cdot \theta_B - 1666.67 \cdot \Delta \quad (1)$$

$$M_{BA} = -71.11 + 3333.33 \cdot \theta_A + 6666.67 \cdot \theta_B - 1666.67 \cdot \Delta \quad (2)$$

$$M_{BC} = 66.67 + 10000 \cdot \theta_B \quad (3)$$

$$M_{CB} = -66.67 + 5000 \cdot \theta_B \quad (4)$$

- Planteando el equilibrio de momentos en los nodos A y B:

$$\sum M_A = M_{AB} = 0$$

$$0 = 35.55 + 6666.67 \cdot \theta_A + 3333.33 \cdot \theta_B - 1666.67 \cdot \Delta \quad (1)$$

$$\sum M_B = M_{BA} + M_{BC} = 0$$

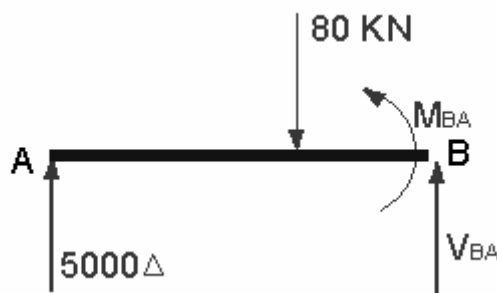
$$0 = -4.44 + 3333.33 \cdot \theta_A + 16666.67 \cdot \theta_B - 1666.67 \cdot \Delta \quad (5)$$

Obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$0 = 35.55 + 6666.67 \cdot \theta_A + 3333.33 \cdot \theta_B - 1666.67 \cdot \Delta \quad (1)$$

$$0 = -4.44 + 3333.33 \cdot \theta_A + 16666.67 \cdot \theta_B - 1666.67 \cdot \Delta \quad (5)$$

Como se puede ver, se tienen 2 ecuaciones y 3 incógnitas. Para encontrar la tercera ecuación del sistema, separamos el tramo AB de la estructura y realizamos su diagrama de cuerpo libre:



Al hacer un corte en los extremos de cualquier barra, el momento interno que aparece será positivo, es decir sentido anti-horario. Esto se debe a la convención usada en la deducción de las ecuaciones básicas del slope.

Haciendo una sumatoria de momentos en el punto B, se obtiene:

$$\sum M_B = -(R_A \cdot 6) + 80 \cdot 2 + M_{BA} = 0$$

Despejando  $M_{BA}$ :

$$M_{BA} = R_A \cdot 6 - 160$$

Recordado que la fuerza de los resortes esta dada por la expresión ( $F = K \cdot \Delta$ ), la reacción del apoyo A ( $R_A$ ) se puede escribir en función del asentamiento del apoyo  $R_A = 5000 \cdot \Delta$ .

- Reemplazando esta expresión en la ecuación de momento  $M_{BA}$ , se obtiene:

$$M_{BA} = (5000 \cdot \Delta) \cdot 6 - 160$$

$$M_{BA} = 30000 \cdot \Delta - 160 \quad (7)$$

Esta ecuación relaciona el momento  $M_{BA}$  con el desplazamiento relativo de la barra AB. Si se iguala esta ecuación (7) con la ecuación (2), se obtendrá una tercera ecuación solamente en función de los desplazamientos de la estructura.

$$\begin{aligned} 30000 \cdot \Delta - 160 &= -71.11 + 3333.33 \cdot \theta_A + 6666.67 \cdot \theta_B - 1666.67 \cdot \Delta \\ 0 &= 88.89 + 3333.33 \cdot \theta_A + 6666.67 \cdot \theta_B - 31666.67 \cdot \Delta \end{aligned} \quad (8)$$

El sistema de ecuaciones a solucionar es:

$$0 = 35.55 + 6666.67 \cdot \theta_A + 3333.33 \cdot \theta_B - 1666.67 \cdot \Delta \quad (1)$$

$$0 = -4.44 + 3333.33 \cdot \theta_A + 16666.67 \cdot \theta_B - 1666.67 \cdot \Delta \quad (5)$$



$$0 = 88.89 + 3333.33 \cdot \theta_A + 6666.67 \cdot \theta_B - 31666.67 \cdot \Delta \quad (8)$$

Solucionando el sistema de ecuaciones de 3x3, se obtiene:

$$\theta_A = -5.50 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\theta_B = 1.62 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\Delta_A = 2.57 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Con estos valores de desplazamientos encontramos el valor de los momentos:

$$M_{AB} = 0 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M_{BA} = -82.93 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M_{BC} = 82.87 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M_{CB} = -58.57 \text{ kN} - \text{m}.$$

**Reacciones:**

$$R_A = 12.85 \text{ kN}.$$

$$R_B = 173.23 \text{ kN}.$$

$$R_C = 93.93 \text{ kN}.$$

$$M_C = -58.57 \text{ kN} - \text{m}.$$

#### **2.4.2 Aplicación de Slope Deflection en el análisis de pórticos**

Cuando se tiene un pórtico sometido a algún sistema de cargas, este se deformara hasta alcanzar su posición de equilibrio. Tratar de entender y determinar el posible

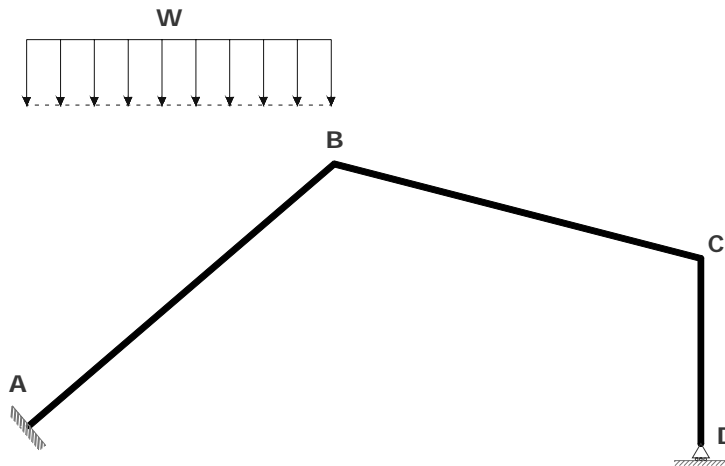
comportamiento de la estructura ante estas cargas, es la base fundamental para el desarrollo de este tipo de problemas.

La aplicación del método del Slope-deflection a pórticos, se fundamenta en plantear la posible deformación que sufrirá la estructura y relacionar los desplazamientos ocurridos en los extremos de las barras entre si, para de esta manera obtener ecuaciones adicionales a las de momentos extremos y a las de estática, que ayudan a solucionar la estructura.

A continuación se mencionan tres posibles desplazamientos que puede sufrir una barra cualquiera de un pórtico, cabe aclarar que los desplazamientos planteados se hacen considerando cada elemento como rígido y no corresponden a la deformación elástica de la barra.

Considérese la siguiente estructura:

**Figura 21:** Estructura Cargada



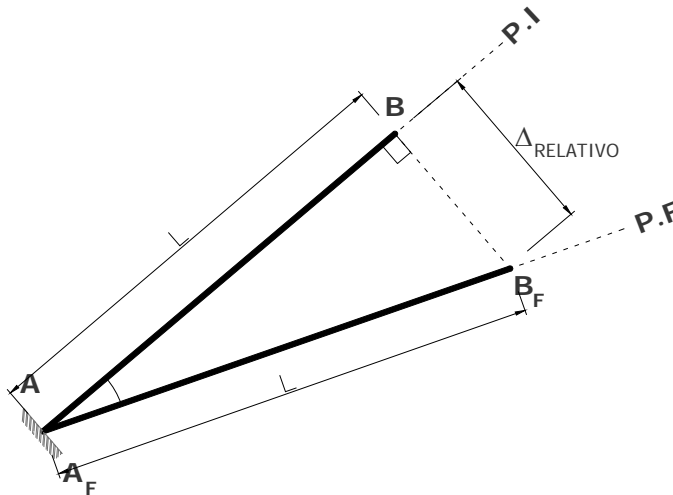
### Caso 1.

- “El desplazamiento relativo que se produce entre los extremos de cualquier barra, solo ocurre en dirección perpendicular al eje de la barra”.
- “Cada barra conservara su longitud inicial después de deformada la estructura”

Las anteriores consideraciones son aceptables en las estructuras de la ingeniería civil, debido a que las deformaciones que ocurren en los elementos de la estructura son muy pequeñas comparadas con la longitud de los elementos.

Para explicar gráficamente las anteriores consideraciones, tómese el elemento AB del pórtico inicial para su análisis:

**Figura 22:** Análisis del Elemento AB



Debido al empotramiento que presenta el nodo A, el único nodo que tiene la posibilidad de desplazarse es el nodo B. Aplicando los conceptos anteriores, el desplazamiento relativo que ocurrirá en la barra será el que se muestra en la grafica anterior.

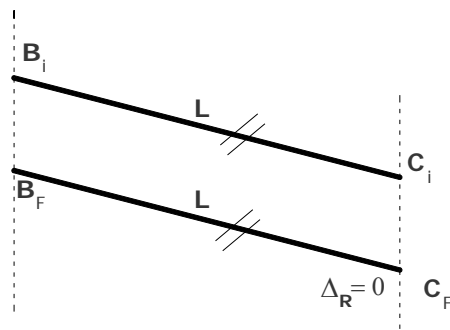
## Caso 2.

*“Si un elemento no presenta restricciones en sus extremos, estos pueden desplazarse en forma paralela, de tal forma que la posición final de la barra sea paralela a la posición inicial”.*

En este caso también se conserva la longitud del elemento después de ocurrido el desplazamiento de la barra. Además no se presenta desplazamiento relativo entre los nodos en la posición final de la barra.

Aplicando este caso al elemento BC del pórtico, se tiene:

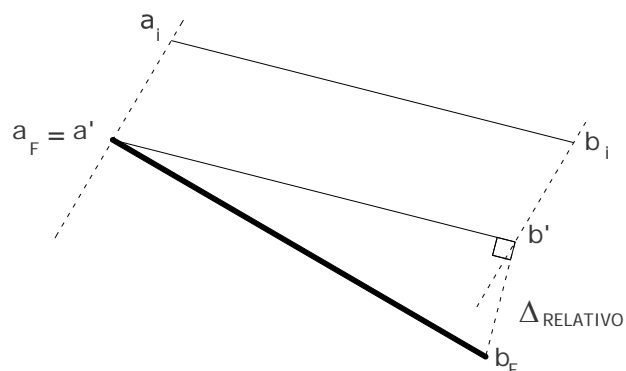
**Figura 23:** Análisis del elemento BC



## Caso 3.

Es la combinación del caso 1 y el caso 2, en el cual la barra primero se traslada, quedando en una posición paralela a su posición inicial y con la misma longitud y luego se considera uno de sus extremos como fijo y el otro se desplaza a lo largo de una línea perpendicular a dicho elemento.

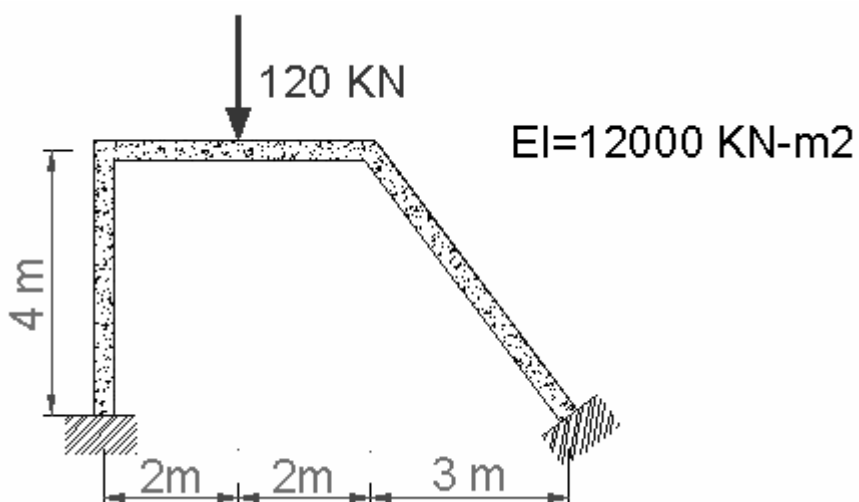
**Figura 24:** Barra trasladada y rotada (Combinación entre Casos 1 y 2)



A continuación se presentan algunos ejemplos tipo que serán de gran ayuda para entender el método del Slope-deflection aplicado a pórticos.

### Ejemplo 2.5.

Determinar los momentos en los extremos de los elementos y las reacciones para el pórtico mostrado.

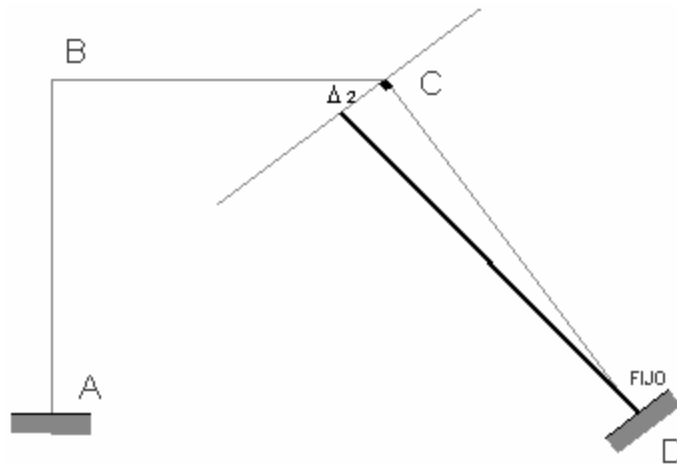


El desarrollo de este ejercicio se inicia trazando la posible deformación que sufrirá el pórtico bajo la acción de la carga aplicada.

### Barra CD:

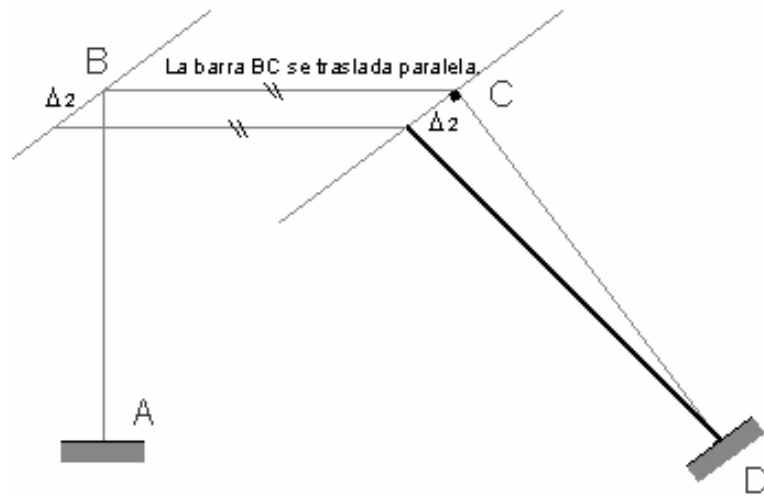
Se empezara analizando la barra CD (*igual se pudo haber iniciado con la barra AB*). Como se observa en el grafico, esta barra se encuentra fija en su extremo D, luego el nodo C será el único extremo que podrá desplazarse. Este nodo se desplazara a lo largo de una línea perpendicular al eje de la barra (caso 1). Este desplazamiento se designara con el símbolo  $\Delta_1$ .

En el siguiente grafico se muestra el desplazamiento realizado y la posición final de la barra:



### Barra BC

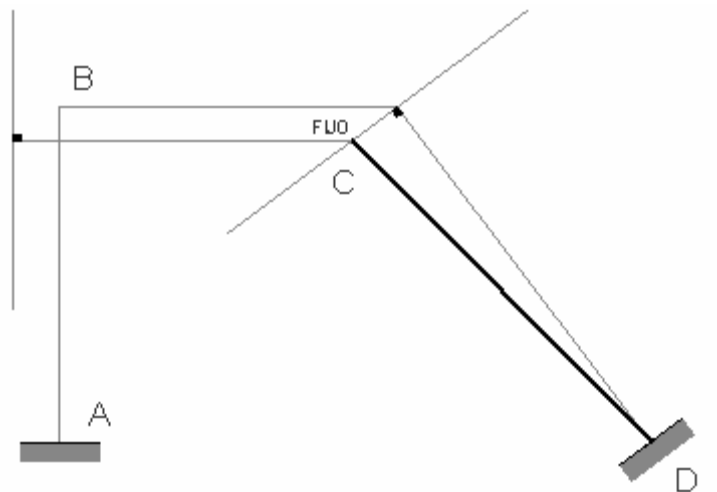
Este elemento aun se encuentra en su posición inicial. Como se sabe, el extremo C de la barra BC debe continuar unida al extremo C de la barra CD. Para esto se trasladara la barra CB hasta el punto donde unión de las dos barras. La barra BC permanece paralela a su posición inicial.



Observando la nueva posición de la barra BC, se puede concluir que el extremo C de esta barra quedara fijo en este punto (c').

Esto se debe a que la barra CD ya se encuentra en su posición final, luego su extremo C no tendrá más desplazamientos (c').

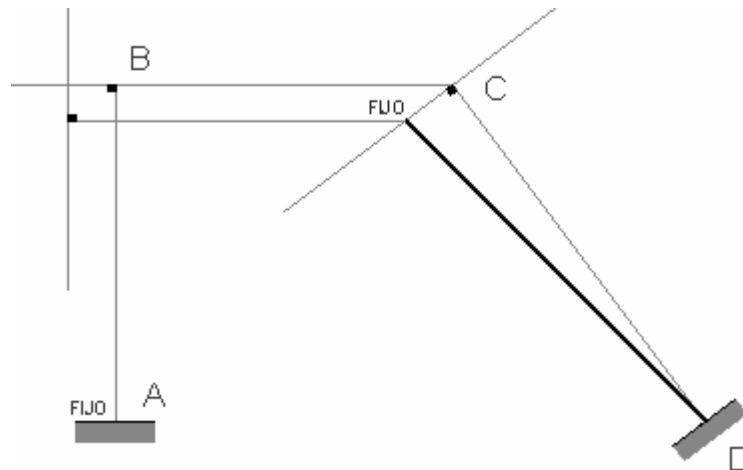
El extremo B de la barra CB si podrá desplazarse a lo largo de una línea perpendicular al eje de la barra, pero aun se desconoce el punto final en el cual quedara.



Se dejara indicada esta línea de desplazamiento y se analizara la barra AB, la cual ayudará a encontrar el punto final de este extremo.

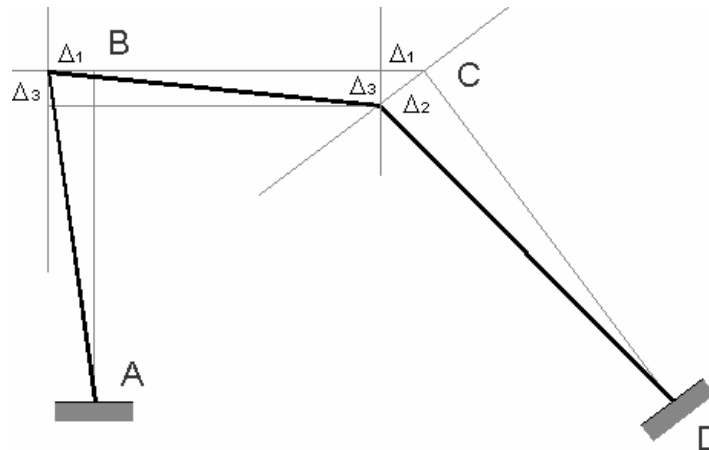
Barra AB:

Esta barra tendrá un análisis similar al planteado para la barra CD. El extremo A permanecerá fijo en este punto debido a la condición de empotramiento que presenta, mientras que el extremo B se desplazara sobre una línea perpendicular al eje del elemento. Como los extremos B de cada una de las barras (AB – BC) deben permanecer unidos, la posición final del nodo B será el punto en el cual se intersectan las rectas de desplazamientos de las barras AB y BC (b')

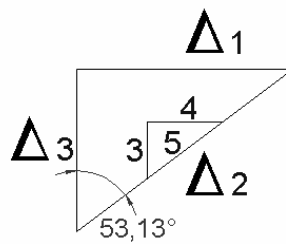


Luego, el desplazamiento total del pórtico quedara de la siguiente manera:





Como se puede observar, en el nodo C se ha generado un triángulo formado por los desplazamientos  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  y  $\Delta_3$ . Haciendo uso de algunos conceptos básicos de geometría se plantean algunas relaciones entre los desplazamientos.



$$\frac{\Delta_2}{3} = \frac{\Delta_3}{4}$$

Recordando que:

$$\Delta_{CD} = \Delta_1,$$

$$\Delta_{BC} = \Delta_2,$$

$$\Delta_{AB} = \Delta_3$$

- $\frac{\Delta_2}{\Delta_3} = \frac{3}{4} \quad \Delta_2 = 0.75 \cdot \Delta_3$
- $\frac{\Delta_1}{\Delta_3} = \frac{5}{4} \quad \Delta_1 = 1.25 \cdot \Delta_3$

Ahora se aplicarán las ecuaciones del Slope a cada una de las barras de la estructura de la misma forma como se ha hecho en los ejemplos anteriores.

Recuérdese tener en cuenta el signo del termino  $\frac{6EI}{L^2}\Delta_R$ , según la convención adoptada en el inicio del capítulo.

Las condiciones de apoyo de la estructura, son tales que:

$$\theta_A = 0 \text{ (empotramiento del nodo)}$$

$$\theta_B = \text{desconocido}$$

$$\theta_C = \text{desconocido}$$

$$\theta_D = 0 \text{ (empotramiento del nodo)}$$

Y recordando:

$$\Delta_{CD} = \Delta_1,$$

$$\Delta_{BC} = \Delta_2,$$

$$\Delta_{AB} = \Delta_3$$

Se tiene:

$$M_{AB} = 6000 \cdot \theta_B - 4500 \cdot \Delta_3 \quad (1)$$

$$M_{BA} = 12000 \cdot \theta_B - 4500 \cdot \Delta_3 \quad (2)$$

$$M_{BC} = 60 + 12000 \cdot \theta_B + 6000 \cdot \theta_C + 4500 \cdot \Delta_2 \quad (3)$$

$$M_{CB} = -60 + 6000 \cdot \theta_B + 12000 \cdot \theta_C + 4500 \cdot \Delta_2 \quad (4)$$

$$M_{CD} = 9600 \cdot \theta_C - 2880 \cdot \Delta_1 \quad (5)$$

$$M_{DC} = 4800 \cdot \theta_C - 2880 \cdot \Delta_1 \quad (6)$$

Otra forma mas ordenada para visualizar las anteriores ecuaciones es:

$M_{ij}$	$M_{ij}^F$	$\theta_B$	$\theta_C$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$
$M_{AB}$	0	6000	0	0	0	-4500
$M_{BA}$	0	12000	0	0	0	-4500
$M_{BC}$	60	12000	6000	0	4500	0
$M_{CB}$	-60	6000	12000	0	4500	0
$M_{CD}$	0	0	9600	-2880	0	0
$M_{DC}$	0	0	4800	-2880	0	0

Retomando las relaciones planteadas para los desplazamientos de la estructura y reemplazando estos valores en las anteriores ecuaciones, se obtiene:

$$\Delta_2 = 0.75 \cdot \Delta_3 \quad \Delta_1 = 1.25 \cdot \Delta_3$$

$$M_{AB} = 6000 \cdot \theta_B - 4500 \cdot \Delta_3 \quad (7)$$

$$M_{BA} = 12000 \cdot \theta_B - 4500 \cdot \Delta_3 \quad (8)$$

$$M_{BC} = 60 + 12000 \cdot \theta_B + 6000 \cdot \theta_C + 3375 \cdot \Delta_3 \quad (9)$$

$$M_{CB} = -60 + 6000 \cdot \theta_B + 12000 \cdot \theta_C + 3375 \cdot \Delta_3 \quad (10)$$

$$M_{CD} = 9600 \cdot \theta_C - 3600 \cdot \Delta_3 \quad (11)$$

$$M_{DC} = 4800 \cdot \theta_C - 3600 \cdot \Delta_3 \quad (12)$$

Planteando el equilibrio de momentos en los nodos B y C:

$$\sum M_B = M_{BA} + M_{BC} = 0$$

$$0 = 60 + 24000 \cdot \theta_B + 6000 \cdot \theta_C - 1125 \cdot \Delta_3 \quad (13)$$

$$\sum M_C = M_{CB} + M_{CD} = 0$$

$$0 = -60 + 6000 \cdot \theta_B + 21600 \cdot \theta_C - 225 \cdot \Delta_3 \quad (14)$$

Obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones:

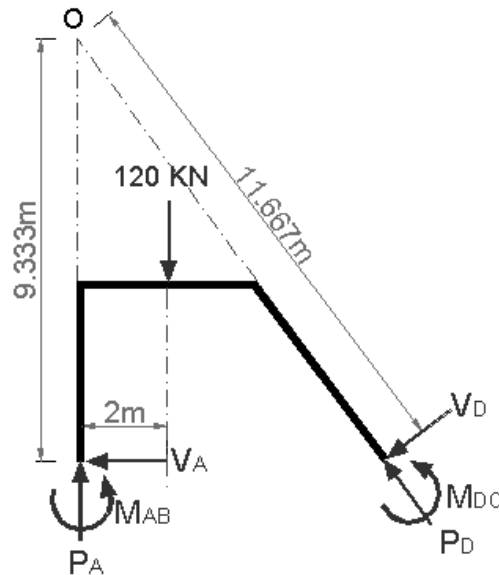
$$0 = 60 + 24000 \cdot \theta_B + 6000 \cdot \theta_C - 1125 \cdot \Delta_3 \quad (13)$$

$$0 = -60 + 6000 \cdot \theta_B + 21600 \cdot \theta_C - 225 \cdot \Delta_3 \quad (14)$$

Como se observa, el sistema presenta 2 ecuaciones y 3 incógnitas ( $\theta_B$ ,  $\theta_C$  y  $\Delta_3$ ), siendo necesario encontrar una tercera ecuación. Esta se encontrará mediante el uso de la estática de la estructura.

### Tercera Ecuación:

Para encontrar esta tercera ecuación, se tomara el diagrama de cuerpo libre de todo el pórtico. Luego, se trazaran las proyecciones de la barra AB y CD hasta su punto de intersección (O) como se puede ver en el grafico inferior.



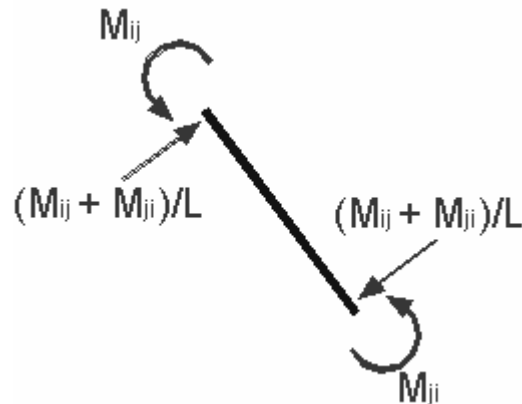
Este punto (O) tiene como particularidad, que al plantearse una sumatoria de momentos con respecto a el, las fuerzas axiales de los elementos AB y CD no generan momento, simplificándose de esta manera el equilibrio de la estructura.

$$\sum M_O = 0$$

$$0 = M_{DC} + M_{AB} - (11.67 \cdot V_{DC}) - (120 \cdot 2) - (9.33 \cdot V_{AB}) \quad (15)$$

En esta última ecuación aparecen los cortantes de los extremos de la estructura ( $V_{DC}$ ,  $V_{AB}$ ), los cuales son desconocidos, agregando dos nuevas incógnitas al sistema.

Ahora, si se separa el elemento CD de la estructura y se plantea una sumatoria de momentos en cualquiera de los extremos de la barra, se encuentra que el valor la fuerza cortante en cualquiera de los extremos es igual a la sumatoria de los momentos extremos dividido entre la longitud de la barra, como se puede observar a continuación:



$$\sum M_B = M_{AB} + M_{BA} - 4 \cdot V_{BA} = 0$$

Despejando el cortante  $V_{BA}$ , se tiene:

$$V_{AB} = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{4} \quad (16)$$

Aplicando el mismo procedimiento para la barra CD, se encuentra que:

$$V_{CD} = \frac{M_{CD} + M_{DC}}{5} \quad (17)$$

Reemplazando estos valores en la ecuación de momentos planteada para toda la estructura (15) se obtiene:

$$0 = M_{DC} + M_{AB} - \left[ 11.67 \cdot \left( \frac{M_{CD} + M_{DC}}{5} \right) \right] - (120 \cdot 2) - \left[ 9.33 \cdot \left( \frac{M_{AB} + M_{BA}}{4} \right) \right]$$

Efectuando las operaciones y reorganizando la ecuación, se obtiene:

$$0 = M_{DC} + M_{AB} - 2.33 \cdot M_{CD} - 2.33 \cdot M_{DC} - 240 - 2.33 \cdot M_{AB} - 2.33 \cdot M_{BA}$$

$$0 = 1.33 \cdot M_{AB} + 2.33 \cdot M_{BA} + 2.33 \cdot M_{CD} + 1.33 \cdot M_{DC} + 240$$

Esta última ecuación es función de los momentos extremos de las barras AB y CD, los cuales a su vez están en función de las rotaciones y del desplazamiento  $\Delta_3$ . Reemplazando las ecuaciones iniciales de momentos [ (7), (8), (11), (12) ] en la anterior ecuación se obtiene:

$$0 = (1.33 \cdot (6000\theta_B - 4500\Delta_3) + 2.33 \cdot (12000\theta_B - 4500\Delta_3) + 2.33 \cdot (4800 \cdot \theta_C - 3600 \cdot \Delta_3) + 1.33 \cdot (9600 \cdot \theta_C - 3600 \cdot \Delta_3) + 240)$$

$$0 = 240 + 35940 \cdot \theta_B + 28752 \cdot \theta_C - 29646 \cdot \Delta_3 \quad (18)$$

Siendo esta la tercera ecuación que se necesitaba para solucionar la estructura.

El sistema de ecuaciones es:

$$0 = 60 + 24000 \cdot \theta_B + 6000 \cdot \theta_C - 1125 \cdot \Delta_3 \quad (13)$$

$$0 = -60 + 6000 \cdot \theta_B + 21600 \cdot \theta_C - 225 \cdot \Delta_3 \quad (14)$$

$$0 = 240 + 35940 \cdot \theta_B + 28752 \cdot \theta_C - 29646 \cdot \Delta_3 \quad (18)$$

Solucionando el sistema, se obtienen los siguientes resultados:

$$\theta_B = -3.05 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\theta_C = 3.71 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\Delta_3 = 7.99 \times 10^{-3} \text{ m.}$$

Una vez conocidos estos valores, se calculan los momentos extremos y de los demás desplazamientos:

$$M_{AB} = -54.26 \text{ kN} - \text{m.}$$

$$M_{BA} = -72.56 \text{ kN} - \text{m.}$$

$$M_{BC} = 72.63 \text{ kN} - \text{m.}$$

$$M_{CB} = -6.81 \text{ kN} - \text{m.}$$

$$M_{CD} = 6.85 \text{ kN} - \text{m.}$$

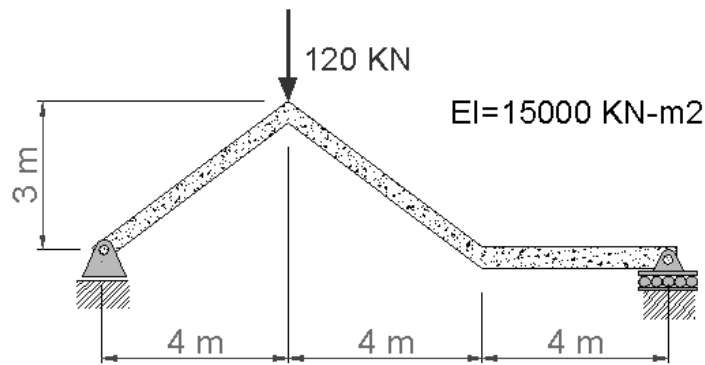
$$M_{DC} = -10.96 \text{ kN} - \text{m.}$$

$$\Delta_1 = 5.99 \times 10^{-3} \text{ m.}$$

$$\Delta_2 = 9.99 \times 10^{-3} \text{ m.}$$

## Ejemplo 2.6

Determinar el valor de los momentos extremos de cada uno de los elementos que componen la estructura, así como también dibujar su deformación con los resultados de desplazamientos y rotaciones obtenidos y realizar los respectivos diagramas de Cortante y Momento.

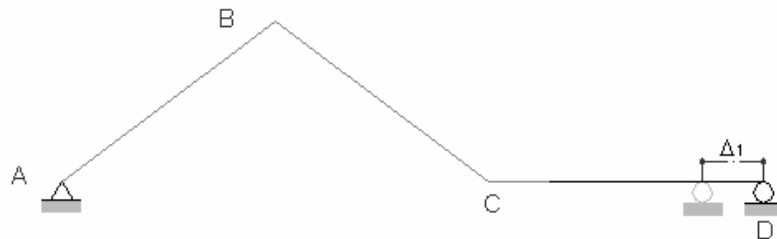


Nuevamente se inicia planteando el posible desplazamiento de la estructura.

- Análisis de desplazamientos:

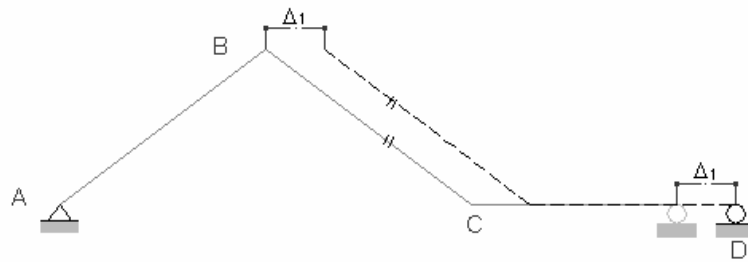
Debido a la condición de apoyo de rodillo que presenta el extremo D de la estructura, la barra CD se desplazará horizontalmente un valor desconocido  $\Delta_1$ . El punto en el cual queda el extremo D será su posición final.

Cabe resaltar que el desplazamiento  $\Delta_1$  no es un desplazamiento relativo entre los nodos CD.

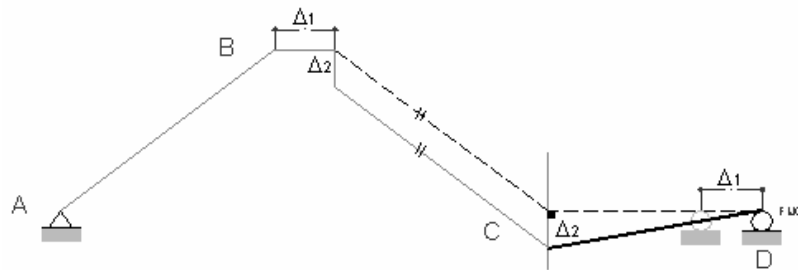


A continuación, la barra BC se desplazara hasta quedar unida a la barra CD en su extremo C. La posición final de la barra BC será paralela a su posición inicial. Como se puede observar en el siguiente grafico, el desplazamiento de la barra BC es el mismo  $\Delta_1$ .

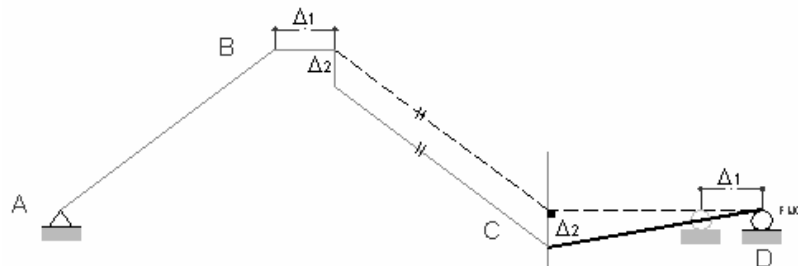




Como se menciona en el inciso (a), el extremo D de la barra CD ya se encuentra en su posición final, mientras que el extremo C aun puede desplazarse perpendicularmente al eje de la barra. Así que se plantea un descenso  $\Delta_2$  del extremo C.



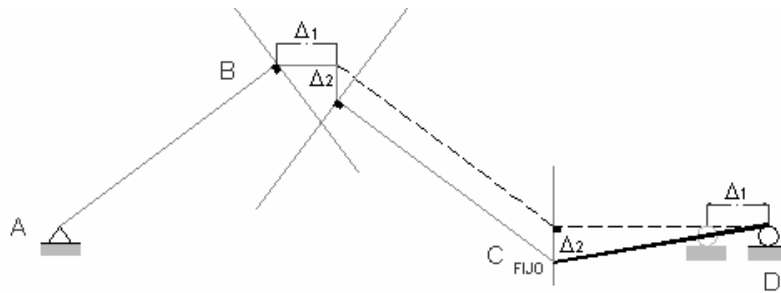
Nuevamente el extremo C de la barra BC se ha separado del extremo C de la barra CD, así que se repetirá el procedimiento realizado en el inciso (b), como se muestra a continuación:



Siendo esta la posición final del extremo C de la barra BC. Su extremo B aun podrá desplazarse perpendicularmente al eje de la barra, pero se desconoce su punto final.

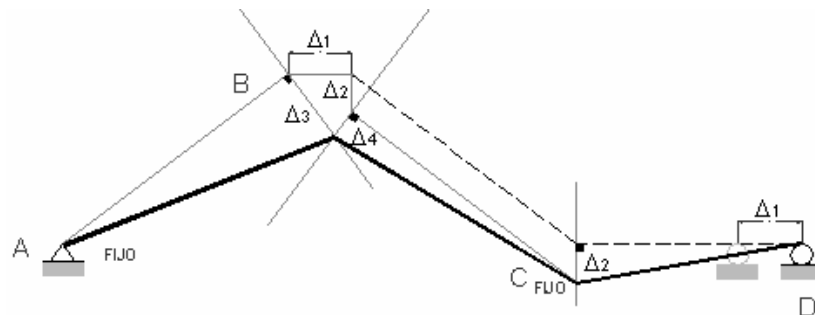
Analizando la barra AB en el anterior grafico, se entiende que su extremo B será el único que tendrá la libertad de desplazarse. Su desplazamiento será perpendicular al eje de la barra, pero se desconoce su punto final.

Como es entendible, los extremos B de las barras AB y BC deben coincidir en algún lugar del espacio. La ubicación de este lugar será el punto de intersección de las dos líneas de desplazamiento trazadas perpendicularmente a cada una de las barras (AB y BC).



El desplazamiento del extremo B de la barra AB se designara con el símbolo  $\Delta_3$  y el desplazamiento del extremo B de la barra BC será  $\Delta_4$ .

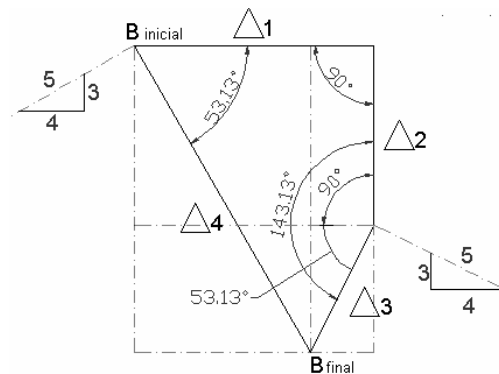
Finalmente la estructura deformada se presenta en el siguiente grafico:



Cabe aclarar que los anteriores desplazamientos están dibujados en un tamaño superior al real. Esto se hizo con el fin de visualizar de una mejor manera la geometría de la estructura deformada.

En la parte superior del nodo B se ha generado una figura geométrica formada por los desplazamientos  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  y  $\Delta_4$ . Los ángulos internos de la figura se obtienen por construcción geométrica de los desplazamientos.

Ampliando su tamaño para su análisis, se pueden plantear las siguientes relaciones:



$$\bullet \quad \Delta_1 = \Delta_4 \cdot \cos(53.13^\circ) + \Delta_3 \cdot \cos(53.13^\circ) = \frac{3}{5} \cdot (\Delta_4 + \Delta_3) \quad (1)$$

$$\bullet \quad \Delta_2 = \Delta_4 \cdot \sin(53.13^\circ) - \Delta_3 \cdot \sin(53.13^\circ) = \frac{4}{5} \cdot (\Delta_4 - \Delta_3) \quad (2)$$

Aplicando las ecuaciones del Slope-deflection a cada una de las barras de la estructura:

$$M_{AB} = 12000 \cdot \theta_A + 6000 \cdot \theta_B + 3600 \cdot \Delta_4 \quad (3)$$

$$M_{BA} = 6000 \cdot \theta_A + 12000 \cdot \theta_B + 3600 \cdot \Delta_4 \quad (4)$$

$$M_{BC} = 12000 \cdot \theta_B + 6000 \cdot \theta_C - 3600 \cdot \Delta_3 \quad (5)$$

$$M_{CB} = 6000 \cdot \theta_B + 12000 \cdot \theta_C + 3600 \cdot \Delta_3 \quad (6)$$

$$M_{CD} = 15000 \cdot \theta_C + 7500 \cdot \theta_D - 5625 \cdot \Delta_2 \quad (7)$$

$$M_{DC} = 7500 \cdot \theta_C + 15000 \cdot \theta_D - 5625 \cdot \Delta_2 \quad (8)$$

Es importante recordar que el desplazamiento  $\Delta_1$  no es un desplazamiento relativo. Es por eso que este término no aparece en el sistema de ecuaciones.

Planteando el equilibrio de momentos en los nodos, se tiene:

- $\sum M_A = 0 = M_{AB}$   
 $0 = 12000 \cdot \theta_A + 6000 \cdot \theta_B + 3600 \cdot \Delta_4 \quad (9)$

- $\sum M_B = 0 = M_{BA} + M_{BC}$   
 $0 = 6000 \cdot \theta_A + 24000 \cdot \theta_B + 6000 \cdot \theta_C + 3600 \cdot (\Delta_4 - \Delta_3) \quad (10)$

- $\sum M_C = 0 = M_{CB} + M_{CD}$   
 $0 = 6000 \cdot \theta_B + 27000 \cdot \theta_C + 7500 \cdot \theta_D + 3600 \cdot \Delta_3 - 5625 \cdot \Delta_2 \quad (11)$

- $\sum M_D = 0 = M_{DC}$   
 $0 = 7500 \cdot \theta_C + 15000 \cdot \theta_D - 5625 \cdot \Delta_2 \quad (12)$

Hasta el momento se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$0 = 12000 \cdot \theta_A + 6000 \cdot \theta_B + 3600 \cdot \Delta_4 \quad (9)$$

$$0 = 6000 \cdot \theta_A + 24000 \cdot \theta_B + 6000 \cdot \theta_C + 3600 \cdot (\Delta_4 - \Delta_3) \quad (10)$$

$$0 = 6000 \cdot \theta_B + 27000 \cdot \theta_C + 7500 \cdot \theta_D + 3600 \cdot \Delta_3 - 5625 \cdot \Delta_2 \quad (11)$$

$$0 = 7500 \cdot \theta_C + 15000 \cdot \theta_D - 5625 \cdot \Delta_2 \quad (12)$$

Este sistema presenta 4 ecuaciones y 7 incógnitas ( $\theta_A, \theta_B, \theta_C, \theta_D, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ ). Si se reemplaza el valor de  $\Delta_2$  presente en las ecuaciones (11) y (12) por la ecuación (2), se eliminara una incógnita más.

El sistema de ecuaciones después de haber hecho el reemplazo anterior es:

$$0 = 12000 \cdot \theta_A + 6000 \cdot \theta_B + 3600 \cdot \Delta_4 \quad (9)$$

$$0 = 6000 \cdot \theta_A + 24000 \cdot \theta_B + 6000 \cdot \theta_C + 3600 \cdot (\Delta_4 - \Delta_3) \quad (10)$$

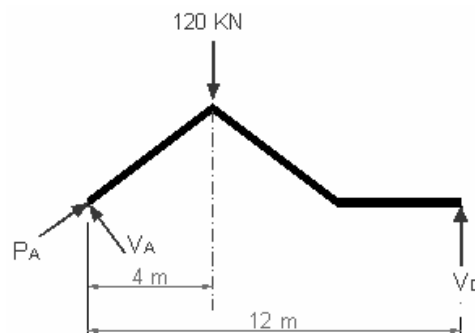
$$0 = 6000 \cdot \theta_B + 27000 \cdot \theta_C + 7500 \cdot \theta_D + 900 \cdot \Delta_3 - 4500 \cdot \Delta_4 \quad (13)$$

$$0 = 7500 \cdot \theta_C + 15000 \cdot \theta_D + 4500 \cdot \Delta_3 - 4500 \cdot \Delta_4 \quad (14)$$

Las dos ecuaciones faltantes para solucionar el sistema, se obtendrán por medio de la estática.

- **Quinta ecuación:**

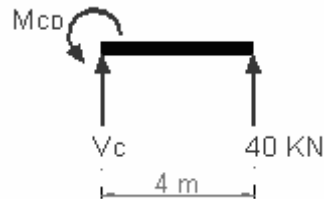
Para encontrar la quinta ecuación, se tomara toda la estructura en conjunto y se planteara una sumatoria de momentos con respecto al punto A, obteniendo:



- $$\sum M_A = -(120 \cdot 4) + (12 \cdot V_{DC}) = 0$$

$$V_{DC} = 40 \text{ kN}.$$

Separando el tramo CD de la estructura, se obtiene que:



- $$\sum M_C = M_{CD} + (4 \cdot V_{DC}) = 0$$

$$M_{CD} = -160 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

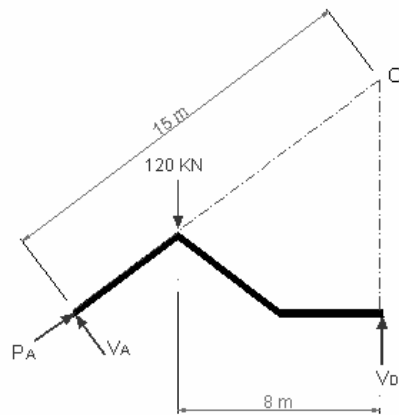
Reemplazando el valor de  $M_{CD}$  y de la ecuación (2) en la ecuación (7), se obtiene:

$$-160 = 15000 \cdot \theta_C + 7500 \cdot \theta_D + 4500 \cdot \Delta_3 - 4500 \cdot \Delta_4 \quad (15)$$

Siendo esta la quinta ecuación para la solución del sistema.

- Sexta ecuación:**

Para encontrar la sexta ecuación, se utilizara nuevamente toda la estructura. Proyectando la barra AB y trazando una línea vertical en el extremo D de la estructura, se encontrará el punto de intersección O de las dos líneas.

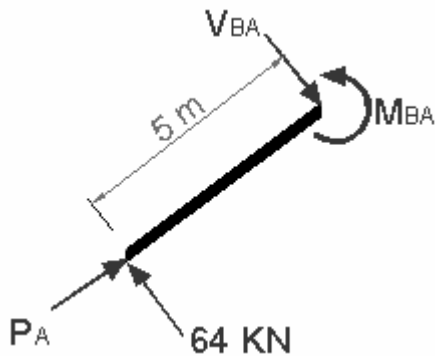


Planteando una sumatoria de momentos de momentos con respecto a este punto, se obtiene:

- $$\sum M_O = 0 = (120 \cdot 8) - (15 \cdot V_{AB})$$

$$V_{AB} = 64 \text{ kN.}$$

Separando el tramo AB de la estructura y planteando sumatoria de momentos con respecto al extremo B, se tiene:



- $$\sum M_B = 0 = M_{BA} - (64 \cdot 5)$$

$$M_{BA} = 320 \text{ kN} - m.$$

Reemplazando el valor de  $M_{BA}$  en la ecuación (4), se obtiene:

$$320 = 6000 \cdot \theta_A + 12000 \cdot \theta_B + 3600 \cdot \Delta_4 \quad (16)$$

El sistema que se obtiene para la solución del pórtico es de ( 6x6 ), y se muestra a continuación:

$$0 = 12000 \cdot \theta_A + 6000 \cdot \theta_B + 3600 \cdot \Delta_4 \quad (9)$$

$$0 = 6000 \cdot \theta_A + 24000 \cdot \theta_B + 6000 \cdot \theta_C + 3600 \cdot (\Delta_4 - \Delta_3) \quad (10)$$

$$0 = 6000 \cdot \theta_B + 27000 \cdot \theta_C + 7500 \cdot \theta_D + 900 \cdot \Delta_3 - 4500 \cdot \Delta_4 \quad (13)$$

$$0 = 7500 \cdot \theta_C + 15000 \cdot \theta_D + 4500 \cdot \Delta_3 - 4500 \cdot \Delta_4 \quad (14)$$

$$-160 = 15000 \cdot \theta_C + 7500 \cdot \theta_D + 4500 \cdot \Delta_3 - 4500 \cdot \Delta_4 \quad (15)$$

$$320 = 6000 \cdot \theta_A + 12000 \cdot \theta_B + 3600 \cdot \Delta_4 \quad (16)$$

Resolviéndolo, se obtiene:

$$\theta_A = -87.70 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\theta_B = -34.37 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\theta_C = 45.63 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\theta_D = 66.96 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\Delta_3 = 5.037 \times 10^{-2} \text{ m.}$$

$$\Delta_4 = 34.96 \times 10^{-2} \text{ m.}$$

Reemplazando los valores de  $\Delta_3$  y  $\Delta_4$  en las ecuación (1) y (2), se obtendrá el valor de  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$ .

$$\Delta_1 = \frac{3}{5} \cdot \left[ \left( 35.0 \times 10^{-2} \right) + \left( 5.04 \times 10^{-2} \right) \right] = 24 \times 10^{-2} \text{ m.}$$



$$\Delta_2 = \frac{4}{5} \cdot \left[ \left( 34.96 \times 10^{-2} \right) - \left( 5.037 \times 10^{-2} \right) \right] = 23.94 \times 10^{-2} \text{ m.}$$

A su vez se pueden conocer los valores de los momentos en los extremos de cada una de las barras de la estructura:

$$M_{AB} = -0.06 \text{ kN} - \text{m.}$$

$$M_{BA} = 319.92 \text{ kN} - \text{m.}$$

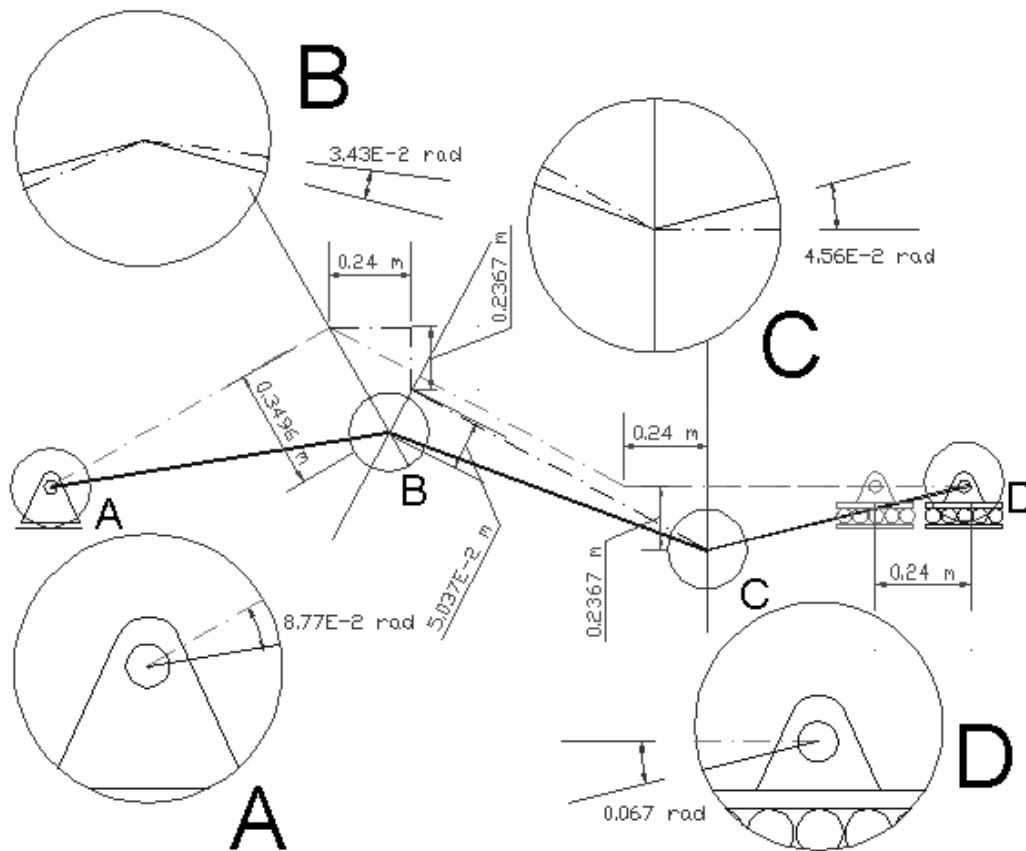
$$M_{BC} = -319.98 \text{ kN} - \text{m.}$$

$$M_{CB} = 160.01 \text{ kN} - \text{m.}$$

$$M_{CD} = -159.98 \text{ kN} - \text{m.}$$

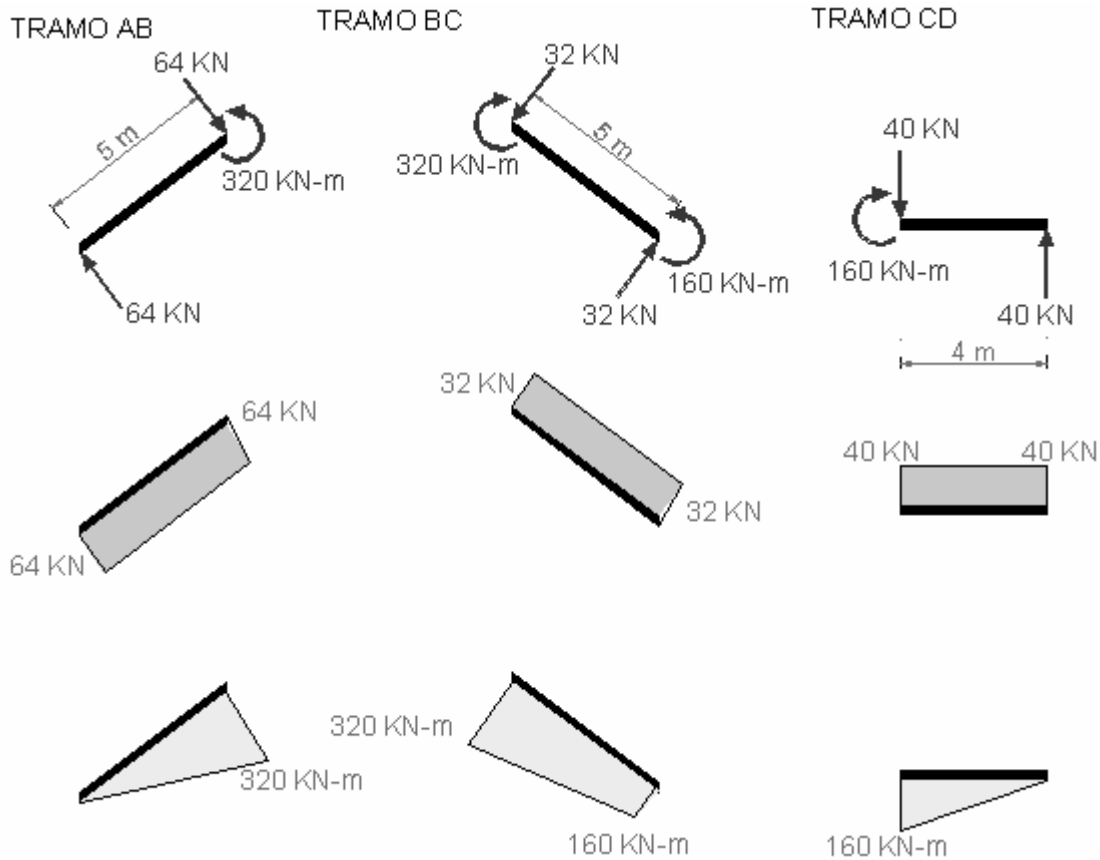
$$M_{DC} = 0 \text{ kN} - \text{m.}$$

- Con los resultados obtenidos se dibuja la deformada:



La exactitud de los resultados varía en menos del 1% de la menor magnitud, por lo tanto son muy eficientes.

- **Diagramas de cortante y momento:**



- **Realización del ejemplo anterior por medio del SAP-2000**

(La siguiente es una explicación muy superficial sobre el uso del SAP-2000)

El objetivo es comparar los resultados del ejercicio anterior, con los obtenidos en el programa SAP-2000 y tener en cuenta ciertas consideraciones como saber introducir los datos de entrada al programa, la ejecución del mismo e interpretar los datos de salida.

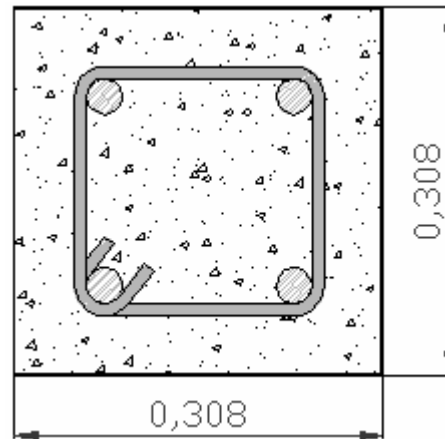
Para lograr la misma rigidez, calculamos una sección para lo cual el valor  $EI$  sea 15000 KN-m<sup>2</sup>.

Suponemos que el material tiene un modulo de elasticidad de 20 GPa (este material puede ser alguna clase de concreto), entonces calcularemos las dimensiones de la sección. Para facilitar los cálculos la sección será cuadrada.

$$EI = 15000 \text{ KN} - \text{m} = 20000000 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2} \times I (\text{m}^4)$$

$$I = \frac{15000 \text{ KN} - \text{m}}{20000000 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2}} = 0.0075 \text{ m}^4 = \frac{1}{12} a^4$$

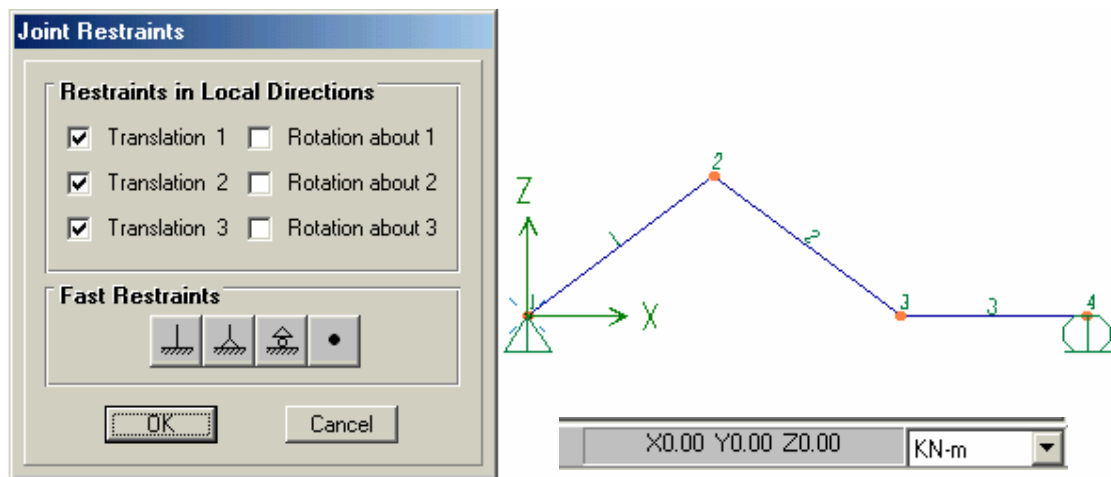
$$\Rightarrow a = \sqrt[4]{12 \times 0.0075} = 0.308 \text{ m}$$



Entonces para nuestros datos de entrada tenemos:

- **GEOMETRIA Y APOYOS:**

Dibujamos la estructura de la siguiente manera: ubicamos los nodos y los unimos con los elementos, teniendo en cuenta el orden en que se enumeran pues así se identificará cada elemento y cada nodo. Definimos los tipos de apoyo que tiene la estructura. (Es importante fijarse en las unidades en las que el programa esta trabajando.)



- **PROPIEDADES DEL MATERIAL:**

**Material Property Data**

**Material Name** CONC

**Type of Material**  
☒ Isotropic   ☐ Orthotropic   ☐ Anisotropic

**Type of Design**  
 Design Concrete

**Analysis Property Data**

Mass per unit Volume	0
Weight per unit Volume	0
Modulus of Elasticity	20000000
Poisson's Ratio	0.2
Coeff of Thermal Expansion	9.900E-06
Shear Moduli	8333333

**Design Property Data**

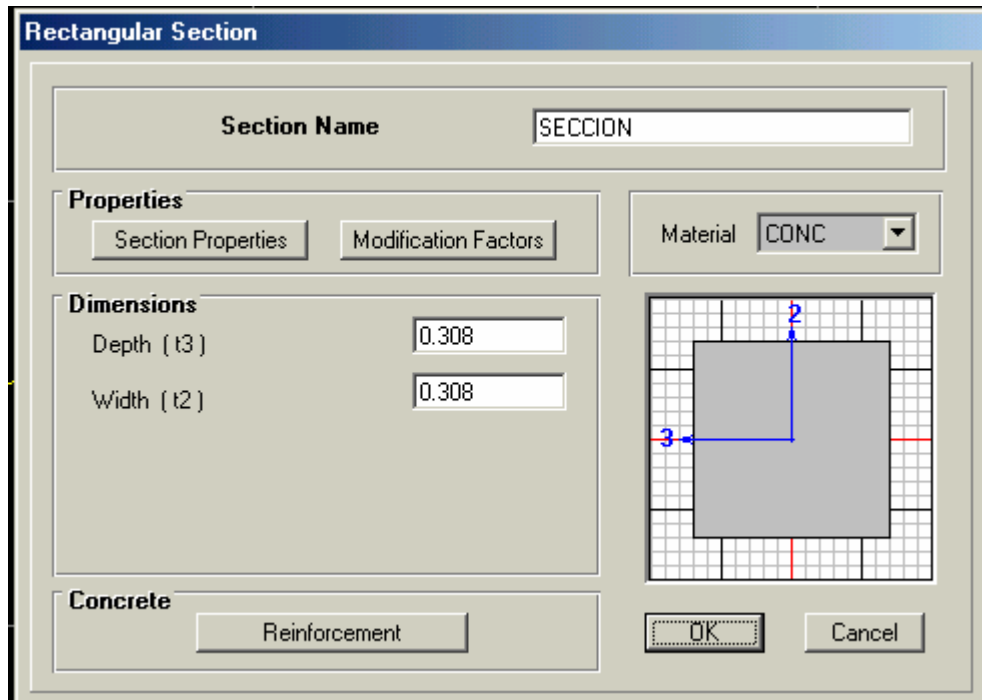
Reinforcing yield stress, fy	420000
Concrete strength (Cylinder), fc	21000
Shear steel yield stress, fys	240000
Concrete shear strength, fcs	21000

OK Cancel

Como no tenemos en cuenta el peso propio de la estructura, entonces la masa y seguidamente el peso, del material lo evaluamos como 0, o sea que la estructura no tiene peso propio.

- **DEFINIR LA SECCION:**

Definimos la sección cuadrada de 0.308mX0.308 m con el fin alcanzar la rigidez de 15000 KN-m2.



- **DEFINIR CARGAS:**

El programa SAP-2000 puede trabajar con diferentes combinaciones de carga simultáneamente, pero nosotros sólo vamos a trabajar con la carga puntual de 120 KN en el nodo 2.

**Joint Forces**

Load Case Name: **LOAD1**

**Loads**

Force Global X: 0

Force Global Y: 0

Force Global Z: -120

Moment Global XX: 0

Moment Global YY: 0

Moment Global ZZ: 0

**Options**

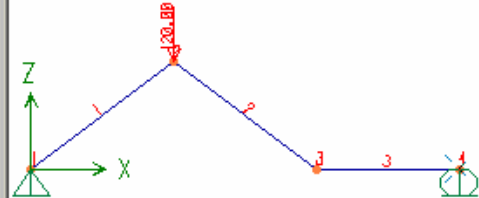
☐ Add to existing loads

☒ Replace existing loads

☐ Delete existing loads

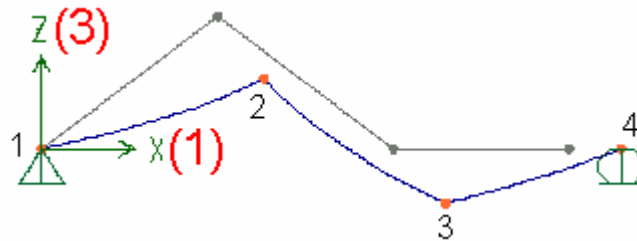
OK

Cancel



Procedemos a correr el programa y observamos los diagramas de cortante y momento para compararlos con los obtenidos con el método de SLOPE DEFLECTON.

**Deformed Shape (LOAD1)**



**Joint Displacements**

Joint ID 1

	1	2	3
Trans	0.00000	0.00000	0.00000
Rotn	0.00000	0.08771	0.00000

**Joint Displacements**

Joint ID 2

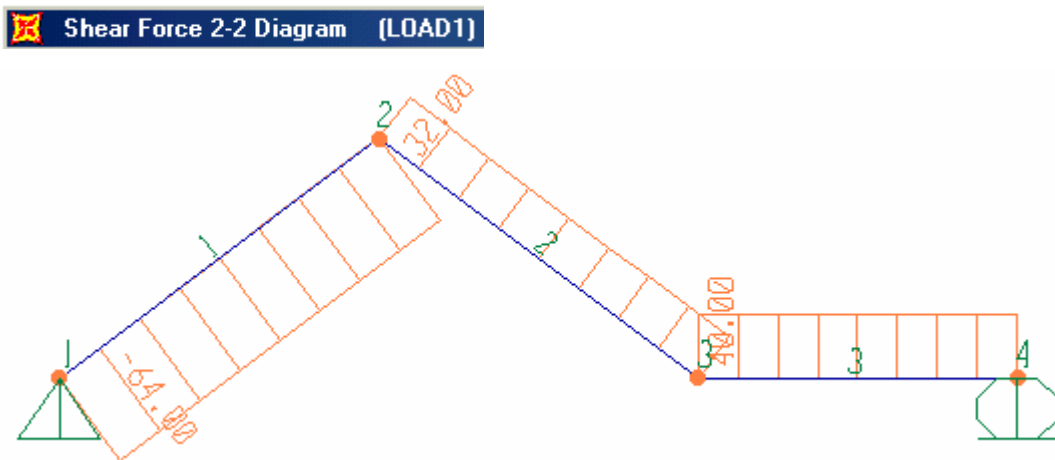
	1	2	3
Trans	0.20999	0.00000	-0.28020
Rotn	0.00000	0.03437	0.00000

Joint Displacements			
Joint ID 3	1	2	3
Trans	0.24031	0.00000	-0.23967
Rotn	0.00000	-0.04563	0.00000

Joint Displacements			
Joint ID 4	1	2	3
Trans	0.24031	0.00000	0.00000
Rotn	0.00000	-0.06697	0.00000

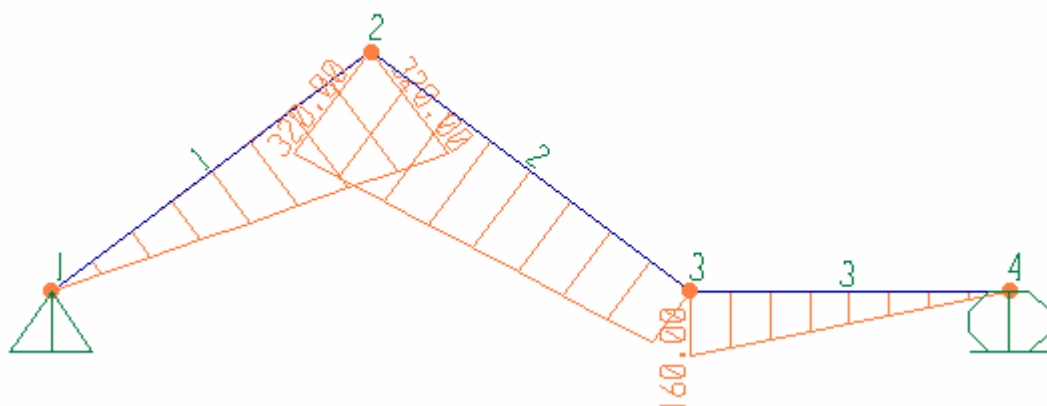
NOTA: El eje X es el mismo eje 1, el eje Y es el mismo eje 2, y el eje Z es el mismo eje 3. Para las coordenadas globales de la estructura.

#### DIAGRAMA DE CORTANTE:



#### DIAGRAMA DE MOMENTOS:



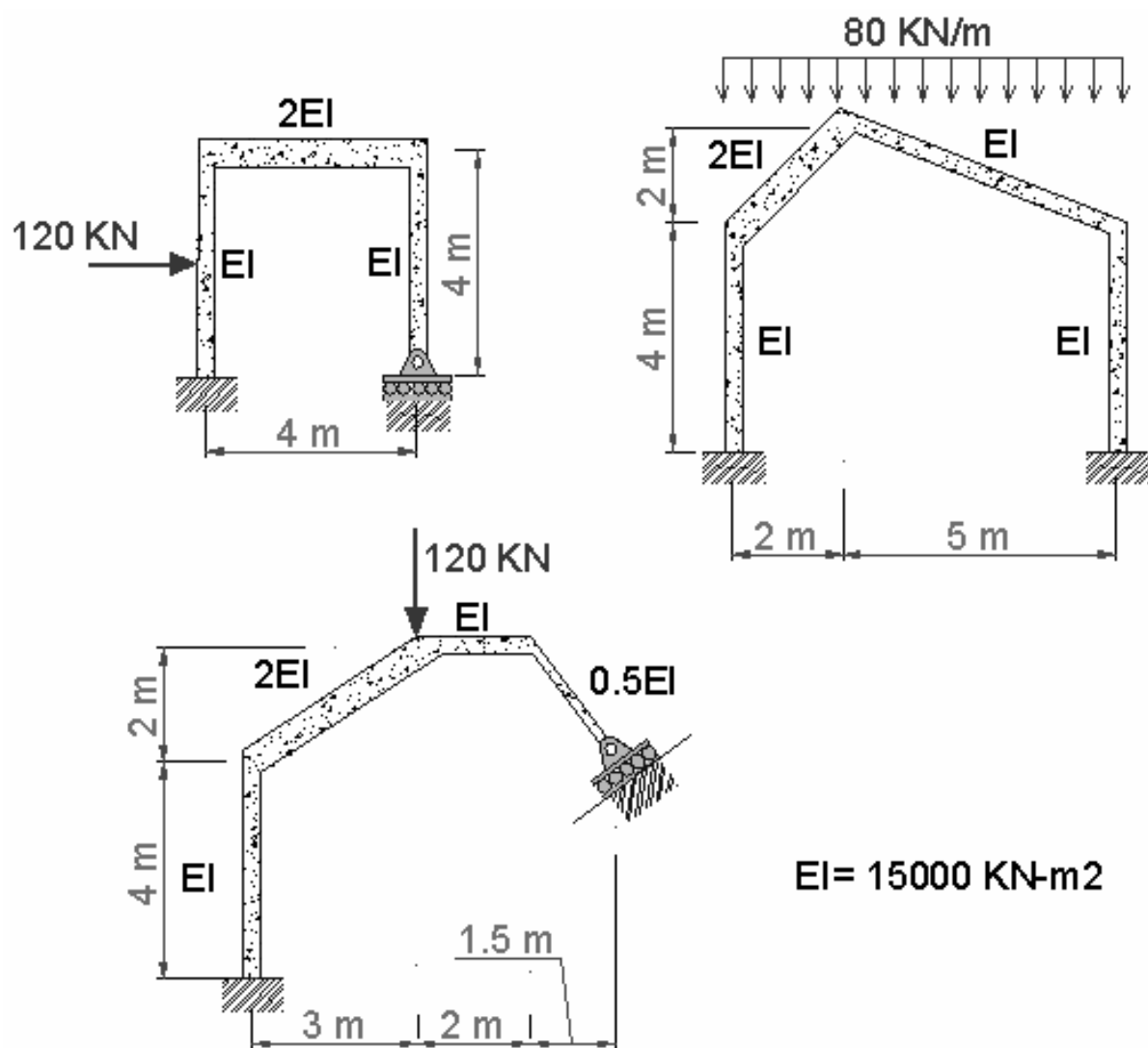


Si se comparan los resultados obtenidos a través del método de Slope Deflection con los obtenidos con el software, se nota que son muy parecidos y se encuentra que los valores son demasiado confiables por ambos métodos, sin embargo es necesario saber todo lo que se esconde detrás de un programa de cálculo y análisis de estructuras como es el SAP-2000 para un buen manejo e interpretación.

## 2.5 EJERCICIOS PROPUESTOS:

Resolver los pórticos mostrados mediante el método de SLOPE DEFLECTION y graficar sus respectivos diagramas de cortante y momento. Las distancias especificadas se dan entre ejes.





2. Realizar los ejercicios anteriores por medio del programa SAP-2000 y comparar resultados.

### 3. MÉTODO DE CROSS

#### 3.1 INTRODUCCIÓN

En el análisis de estructuras se presenta con frecuencia el caso de la de estructuras hiperestáticas. El cálculo de estas estructuras se puede efectuar planteando un sistema general de ecuaciones. En estructuras reticulares de edificación, con nudos rígidos, este método conduce a un elevado número de ecuaciones e incógnitas, que en la antigüedad era bastante difícil y casi imposible de solucionar, ya que no se contaban con los adelantos tecnológicos como lo son las calculadoras programables y los computadores.

En 1930, el profesor Hardy Cross expuso en su obra *Analysis of continuous frames* el método de aproximaciones sucesivas que lleva su nombre. El método de Cross es un procedimiento ideado para resolver el problema de las estructuras reticulares. El cálculo es relativamente sencillo, sin que aparezcan en su desarrollo integraciones complejas ni sistemas de ecuaciones complicados. Es más, una vez comprendido el mecanismo del método, las operaciones matemáticas se reducen a sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. Además, no exige recordar nada de memoria. Si se dispone de unas tablas de momentos, rigideces y factores de transmisión, puede resolverse cualquier estructura. Si, como es frecuente, se trata de estructuras con piezas de sección constante en cada vano y con cargas uniformemente distribuidas, ni siquiera es necesario el empleo de tablas.

El método de Cross es un método de aproximaciones sucesivas, que no significa que sea aproximado. Quiere decir que el grado de precisión en el cálculo puede ser tan elevado como lo desee el calculista.

El método permite seguir paso a paso el proceso de distribución de momentos en la estructura, dando un sentido físico muy claro a las operaciones matemáticas que se realizan.

### 3.2 LIMITACIÓN

En el presente capítulo solo se analizarán estructuras compuestas por barras prismáticas, es decir barras que tienen una inercia constante en toda su longitud y estructuras que no sufren desplazamientos relativos entre nodos o desplazamientos de piso como es el caso de los pórticos.

La razón por la cual se excluyeron las otras variables de análisis en el presente capítulo se debe a que en la actualidad se cuenta con programas de análisis estructural muy completos que permiten considerar estas y muchas otras variables sin presentar una mayor dificultad para su solución, mientras que para el método de Cross estas variables implicarían un largo proceso de cálculo.

#### 3.2.1. Conceptos previos

**3.2.1.1 Suposiciones básicas del método:** las suposiciones básicas del método son:

- a. Todos los miembros de la estructura son prismáticos (  $E$ ,  $I$  constantes ).
- b. Las deformaciones de la estructura son debidas, principalmente, al efecto de los momentos.
- c. La estructura se comporta en el rango elástico (obedece a la **ley de Hooke**).
- d. Las deformaciones axiales son despreciables.

**3.2.1.2. Momentos de empotramiento:** Son los momentos generados en los extremos de una barra  $i-j$  debido a las cargas externas actuantes sobre la barra cuando sus extremos se consideran restringidos, es decir, empotrados.

**3.2.1.3. Nodo Rígido:** Un nodo rígido tiene como características principales que todos los extremos de los elementos que concurren a él tienen la misma rotación y el mismo desplazamiento, es decir no habrá desplazamientos relativos ni rotaciones relativas entre los extremos de los elementos.

“Los elementos que concurren a un nodo rígido conservan el mismo ángulo inicial existente entre ellos *después de que la estructura se ha deformado bajo la acción de las cargas externas*”.

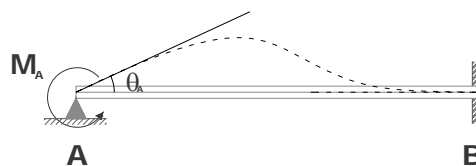
**3.1.2.4 Rigidez Rotacional:** Uno de los conceptos más importantes para el entendimiento del método de Cross es el de la rigidez rotacional, el cual se define como: “la capacidad que tiene un miembro para resistir una rotación unitaria de 1 radian en un extremo simplemente apoyado, generada por la aplicación de un momento en ese mismo apoyo, mientras el extremo opuesto se encuentra empotrado, semi-empotrado o simplemente *apoyado*”.

**Figura 25:** Rigidez Rotacional



A Continuación se determinará la rigidez rotacional de la viga prismática de la figura (a).

**Figura 26:** Rotación Unitaria en el nodo A



Usando el método de la viga conjugada (Capítulo 1), se obtiene que la relación existente entre el momento aplicado en A ( $M_A$ ) y la rotación en A ( $\theta_A$ ) está dada por la expresión:

$$M_A = \frac{4EI}{L} \cdot \theta_A \quad \text{Ecuación 3.1}$$

Para una rotación unitaria:

$$\theta_A = 1 \text{ rad.} \longrightarrow M_A = \frac{4EI}{L} \cdot (1 \text{ rad}) \quad \text{Ecuación 3.2}$$

De la expresión anterior se concluye que el valor del momento que se tendría que aplicar en el nodo A para obtener una rotación unitaria es de  $\frac{4EI}{L}$ . Este valor se conoce como la rigidez rotacional y se designa con la letra  $K_{AB}$ .

Retomando la ecuación 3.1, tenemos:

$$M_A = K_{AB} \cdot \theta_A \quad \text{Ecuación 3.3}$$

¿Cuál es la rigidez rotacional para el caso en que ambos extremos de la viga se encuentran articulados y se aplica un momento en el nodo A?



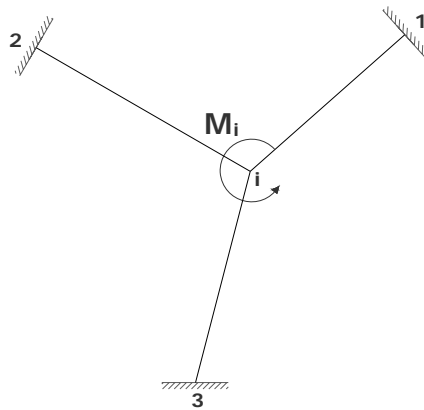
### 3.3 DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS EN UN NODO (FACTOR DE DISTRIBUCIÓN)

La pregunta más importante al analizar una estructura por el método de distribución de momentos de Cross, es la de cómo distribuir el momento aplicado en un nodo

entre todos los elementos que llegan a ese nodo, es decir, que parte del momento actuante en el nodo absorbe cada barra conectada a éste.

Analicemos la siguiente estructura, a la cual se le ha aplicado un momento externo  $M_i$  en el nodo  $i$ .

**Figura 27:** Estructura con un Momento aplicado en el nodo  $i$



El momento  $M_i$  hace que el nodo  $i$  se desequilibre y por lo tanto rote hasta alcanzar su posición de equilibrio, esta ocurre cuando en los extremos  $i$  de cada una de las barras que llegan a este nodo ( $i-1$ ,  $i-2$ ,  $i-3$ ) se generen momentos suficientes tales que *sumados* compensen el efecto del momento  $M_i$ . Es decir, el nodo  $i$  queda en equilibrio cuando la suma de los momentos en los extremos de cada una de las barras produzcan un momento de igual magnitud que la del momento  $M_i$ , pero de signo contrario.

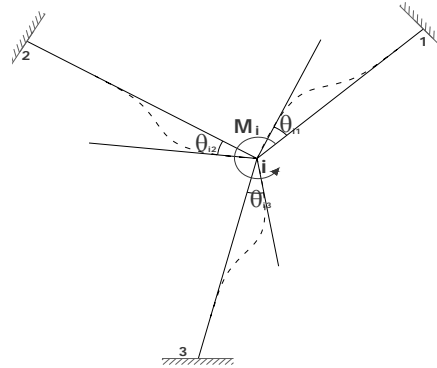
De lo anterior, se concluye que:

*Momento de desequilibrio ( $M_{des\ i}$ ):  $M_i$*

*Momento de equilibrio ( $M_{equi\ i}$ ):-  $M_i$*

En el siguiente gráfico se observa la estructura deformada por el momento  $M_i$ .

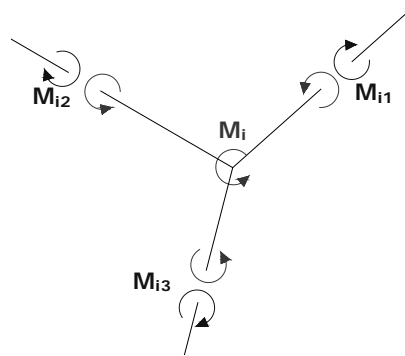
**Figura 28:** Estructura Deformada por el Momento  $M_i$



Cada barra gira un ángulo igual a  $\theta_i = \theta_{i-1} = \theta_{i-2} = \theta_{i-3}$  en su nodo  $i$ , esto se debe a la rigidez que presenta el nodo.

Separando el nodo  $i$  de toda la estructura para su análisis en el instante cuando el nodo llega a su posición de equilibrio se tiene:

**Figura 29:** Análisis de la estructura deformada



Planteando el equilibrio del nodo  $i$  ( $\sum M_{nodo i} = 0$ ), se tiene:

$$M_{des} i + M_{equi} i = 0$$

donde:

$$M_{des} i = M_i$$

$$M_{equi,i} = (M_{i1} + M_{i2} + M_{i3})$$

Reemplazando, se obtiene:

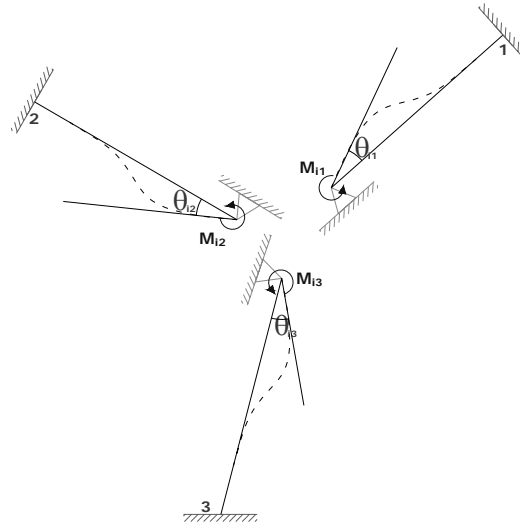
$$Mi = -M_{equi,i}$$

$$Mi = -(M_{i1} + M_{i2} + M_{i3})$$

**Ecuación 3.4**

Ahora, Analizando las barras de la estructura por separado se tiene:

**Figura 30:** Análisis de cada barra de la estructura



Calculando el momento en el nodo i de cada una de las barras en función de la rotación  $\theta_i$ , se obtiene:

$$M_{i1} = \frac{4EI}{L} \cdot \theta_i = K_{i1} \cdot \theta_i$$

$$M_{i2} = \frac{4EI}{L} \cdot \theta_i = K_{i2} \cdot \theta_i$$

$$M_{i3} = \frac{4EI}{L} \cdot \theta_i = K_{i3} \cdot \theta_i$$

**Ecuación 3.5**

Reemplazando estos valores en la **Ecuación 3.4** se obtiene:



$$M_i = -M_{equi} = -(K_{i1} \cdot \theta_i + K_{i2} \cdot \theta_i + K_{i3} \cdot \theta_i) \quad \text{Ecuación 3.6}$$

Factorizando y despejando  $\theta_i$  de la anterior ecuación:

$$\theta_i = \frac{-M_i}{(K_{i1} + K_{i2} + K_{i3})} \quad \text{Ecuación 3.7}$$

Reemplazando este valor de  $\theta_i$  en la ecuación 3.5:

$$M_{i1} = K_{i1} \cdot \left[ \frac{-M_i}{(K_{i1} + K_{i2} + K_{i3})} \right] = K_{i1} \cdot \frac{-M_i}{\sum K_{ij}}$$

Reagrupando, se obtiene:

$$M_{i1} = \left[ \frac{K_{i1}}{\sum K_{ij}} \right] \cdot (-M_i) \quad \text{Ecuación 3.8}$$

Haciendo lo mismo con las demás ecuaciones:

$$M_{i2} = \left[ \frac{K_{i2}}{\sum K_{ij}} \right] \cdot (-M_i) \quad \text{Ecuación 3.9}$$

$$M_{i3} = \left[ \frac{K_{i3}}{\sum K_{ij}} \right] \cdot (-M_i) \quad \text{Ecuación 3.10}$$

Como se puede observar, el momento de equilibrio actuante en el nodo i ( $-M_i$ ), se distribuye en cada una de las barras que llegan al nodo i en proporción al termino

$\left( \frac{K_{ij}}{\sum K_{ij}} \right)$ , el cual se denomina “**Factor de distribución**” y se representa por el

símbolo  $\mu_{ij}$ .

$$\mu_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sum K_{ij}} \quad \text{Ecuación 3.11}$$

Donde:

$K_{ij}$  = Rigidez rotacional de la barra  $i-j$ .

$\sum K_{ij}$  = Suma de todas las rigideces de las barras  $i-j$  que llegan al nodo.

Así, las ecuaciones originales quedarán reducidas a:

$$M_{i1} = \mu_{i1} \cdot (-M_i)$$

$$M_{i2} = \mu_{i2} \cdot (-M_i)$$

$$M_{i3} = \mu_{i3} \cdot (-M_i)$$

De lo anterior se concluye que: *“El momento de equilibrio que se produce en el extremo  $i$  de cada una de las barras que concurren al nodo  $i$ , cuando el nodo tiene la libertad de girar bajo la acción de un momento  $M_i$ , es igual al producto del factor de distribución  $\mu_{ij}$  de cada barra por el valor negativo del momento actuante  $M_i$ ”.*

### 3.3.1 Factor de distribución ( $\mu_{ij}$ )

El factor de distribución se define como el porcentaje del momento de equilibrio del nodo  $i$ , que produjo cada barra que llega a ese nodo.

Como características importantes se tienen:

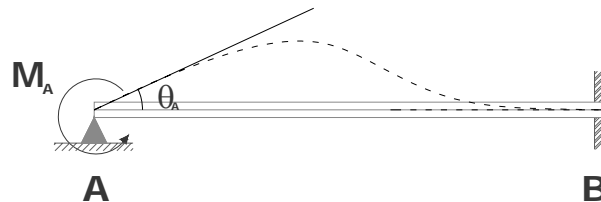
- El factor de distribución es independiente de la carga y sólo depende de las características de la viga, tales como: *la Inercia, El Módulo de Elasticidad y su Longitud ( $I, E, L$ ).*
- El cálculo del factor de rigidez para las barra es bastante sencillo, pues sólo hay que dividir la rigidez de cada barra sobre la suma de las rigideces de todas las barras que llegan a ese nodo.

- La suma de los factores de distribución de todas las barras que concurren a un nodo es igual a 1 ( $\sum \mu_{ij} = 1$ ).

### 3.3.2 Transmisión de momentos entre extremos

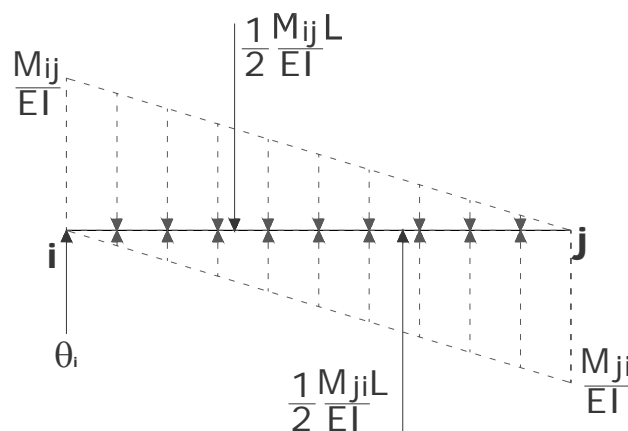
De acuerdo a lo visto en los capítulos anteriores, al aplicar un momento  $M_{ij}$  en el extremo i de la viga de la siguiente figura, se induce un momento  $M_{ji}$  en el extremo empotrado.

**Figura 31:** Momento  $M_{ij}$  aplicado en el extremo i



Esto se demuestra fácilmente mediante el método de la viga conjugada, tal como se muestra a continuación:

**Figura 32:** Diagrama de Cuerpo Libre de la Barra i-j



Al despejar el valor de  $M_{ji}$  de la ecuación anterior se obtiene:

$$M_{ji} = \frac{1}{2} M_{ij}$$

**Figura 33:** Cálculo de Momentos Extremos en la Barra i-j



De acuerdo a lo anterior: El momento transmitido al nodo j es igual a la mitad del momento aplicado en el nodo i y tiene su mismo signo.

Aquí aparece un nuevo termino llamado “Coeficiente de transmisión”, el cual se define, como la relación existente entre el momento transmitido en j y el momento actuante en i se aplica un momento a una viga con un extremo simplemente apoyado y el otro empotrado el coeficiente de transmisión es igual a  $+\frac{1}{2}$ . Cuando se aplica

$$Coef.Transm = \frac{M_{ji}}{M_{ij}} = +\frac{1}{2}$$

**Ecuación 3.12**

¿Cual es el coeficiente de transmisión cuando ambos extremos de una viga se encuentran articulados y se aplica un momento en el nodo i?

### 3.4. PROPIEDADES DE LOS APOYOS

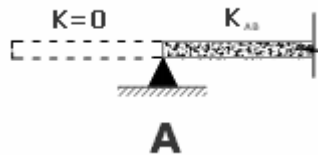
Analicemos la siguiente viga:

**Figura 34:** Viga con Apoyos Simples y Empotramiento



El nodo A se encuentra simplemente apoyado y a éste solo llega la barra AB. Para calcular el factor de distribución de esta barra  $\mu_{AB}$ , se considera que la barra en su extremo A se encuentra unida a otra barra de rigidez nula ( $K=0$ ), por lo que el factor de distribución será igual a  $\mu_{AB} = 1$

**Figura 35:** Factor de Distribución en Apoyos Simples

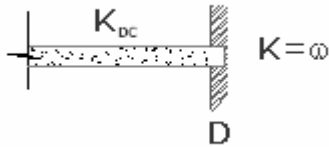


$$\mu_{AB} = \frac{K_{AB}}{K_{AB} + 0} = \frac{K_{AB}}{K_{AB}} = 1$$

**Ecuación 3.13**

Caso contrario se presenta en el nodo D, el cual se encuentra perfectamente empotrado. En este caso, se considera que la barra CD en su extremo D se encuentra unida a otro elemento de rigidez infinita ( $K=\infty$ ), por lo que el factor de distribución es nulo  $\mu_{DC} = 0$ .

**Figura 36:** Factor de Distribución en Apoyo empotrado

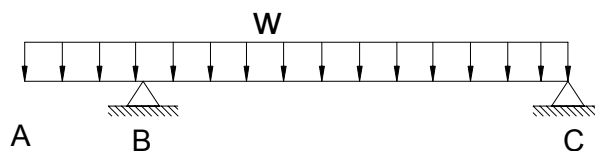


$$\mu_{AB} = \frac{K_{AB}}{K_{AB} + \infty} = \frac{K_{AB}}{\infty} = 0$$

**Ecuación 3.14**

En caso de que se tenga un voladizo se presenta la siguiente situación:

**Figura 37:** Viga Cargada y en voladizo



El tramo AB no contribuye a la rigidez rotacional del nodo B, es decir, el factor de distribución para el extremo BA será nulo  $\mu_{BA} = 0$ , mientras que el factor para el extremo BC será igual a 1,  $\mu_{BC} = 1$ ; así, este nodo se puede tratar como si tuviera un apoyo simple. *Sin embargo, es de suma importancia tener en cuenta en el nodo B el momento que se genera por la carga sobre el voladizo, así como el cortante generado.*

Más adelante se muestra un ejercicio sobre este tema tipo donde analizaremos el voladizo.

### 3.5 PRINCIPIOS BÁSICOS DEL MÉTODO DE LA DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS DE CROSS

A continuación se describe de manera general el proceso de distribución de momentos de Cross:

El método de Cross es un procedimiento iterativo en el cual, inicialmente se considera que todos **los nodos de la estructura que tienen la libertad de rotar** se encuentran temporalmente restringidos a la rotación por medio de sujeciones imaginarias aplicadas en los extremos de los elementos.

Aplicando las cargas existentes sobre los elementos de la estructura fija (hipotéticamente) se calculan los momentos de empotramiento en los extremos de los elementos.

Ahora existe un momento de desbalance en cada uno de los nodos. Para lograr el equilibrio, se libera uno de los nodos desequilibrados permitiéndole así la rotación, mientras se mantienen empotrados los otros nodos. El nodo liberado rota bajo la acción del momento de desequilibrio hasta encontrar su posición de equilibrio; ésta, se alcanzara cuando se produzca en los extremos de las barras conectadas al nodo momentos suficientes que sean capaz de equilibrar el nodo  $\sum M_{nodo} = 0$ .

Los momentos generados se conocen como momentos distribuidos y tendrán el signo contrario al momento de desequilibrio. Sus valores se obtendrán al multiplicar el valor **negativo del momento de desequilibrio** por los factores de distribución ( $\mu_{ij}$ ) de cada uno de elementos conectados a ese nodo.

El momento distribuido que aparece en cada extremo de las barras conectadas al nodo transmiten a su extremo opuesto un momento de magnitud igual a la mitad del momento distribuido y de igual signo.

Equilibrado el nodo y transmitidos los momentos a los nodos adyacentes, se restringirá nuevamente el grado de libertad rotacional. A continuación se selecciona otro nodo que este desequilibrado y se libera de la sujeción imaginaria. El nuevo nodo liberado se

equilibra de la misma manera expuesta anteriormente y se transmiten los momentos a los nodos opuestos de cada una de las barras, y nuevamente se restringe. El procedimiento se repite con todos los nodos de la estructura (*nodos que pueden rotar*) cuantas veces sea necesario hasta que los valores a distribuir sean muy pequeños.

En general, el procedimiento para desarrollar estructuras sin desplazamientos relativos entre nodos por medio del método de Cross se reduce a los siguientes pasos:

- a. Calcule la rigidez  $K_{ij}$  de cada barra de la estructura.
  - b. Calcule el factor de distribución  $\mu_{ij}$  para cada una de las barras que concurren a un nodo.
  - c. Considere todos los nodos de la estructura empotrados y calcule los momentos de empotramiento en los extremos de cada una de las barras.
  - d. Libere uno de los nodos de la estructura para equilibrarlo (*para una mas rápida convergencia del método se recomienda empezar por el nodo que presente mayor momento de desequilibrio*). Para lograr esto, distribuimos el valor **negativo del momento de desequilibrio** del nodo entre los elementos que llegan al nodo en proporción a los factores de distribución. Los momentos distribuidos tendrán signo contrario al del momento de desequilibrio.
  - e. Transmita la mitad del momento distribuido de cada barra a su extremo opuesto. El momento transmitido tiene el mismo signo del momento distribuido.
  - f. Nuevamente empotre el nodo y libere otro nodo desequilibrado.
- Repita el paso **d, e y f** hasta que los momentos distribuidos y los momentos transmitidos sean lo suficientemente pequeños para ser despreciados. De esta manera se opera cíclicamente.
- g. Los momentos definitivos en cada uno de los extremos de las barras se obtiene sumando (*teniendo en cuenta los signos*) el momento inicial de empotramiento de cada extremo y todos los momentos distribuidos que llegan a ese extremo.



**Importante:**

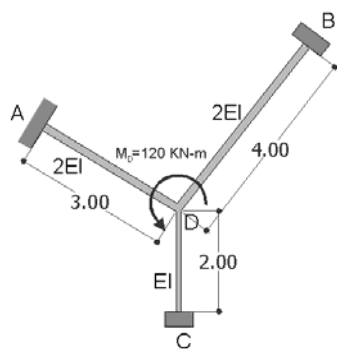
- La aproximación de los resultados obtenidos dependerá del número total de ciclos de distribución que se hagan.
- Si la distribución de momentos se realiza de forma correcta, entonces los momentos finales deben satisfacer las ecuaciones de equilibrio de momentos en todos los nodos de la estructura.

**h.** Conocidos los momentos resultantes en los extremos de cada elemento, se calculan los cortantes para cada uno de los elementos mediante las ecuaciones básicas de equilibrio ( $\sum M_i = 0$ ,  $\sum F_y = 0$ ) y con esto calculamos las reacciones en los nodos.

### 3.6 Aplicación del método de Cross

**Ejemplo 3.1:**

Calcular los Momentos extremos de cada uno de los elementos que conforman la siguiente estructura



Los apoyos A, B, C son empotrados.

$$EI = 20.000 \text{ KN} - \text{m}^2$$

$$M_D = 120 \text{ KN} - \text{m}$$

Solución

Analizando la estructura anterior, el momento  $M_D$  hace que el nodo D se desequilibre y gire en sentido anti – horario; para equilibrarlo hay que aplicar un momento igual a  $(-M_D)$ . El  $(-M_D)$  es la suma de los momentos generados como oposición a la rotación en cada uno de los extremos **D** de las barras que concurren al nodo **D**.

- Primero calculamos la rigidez de cada barra:

$$K_{DA} = \frac{4 \times EI_{AD}}{L_{AD}} = \frac{4 \times [2 \cdot (20000)]}{3} = 53333.33$$

$$K_{DB} = \frac{4 \times EI_{BD}}{L_{BD}} = \frac{4 \times [2 \cdot (20000)]}{4} = 40000$$

$$K_{DC} = \frac{4 \times EI_{CD}}{L_{CD}} = \frac{4 \times [20000]}{2} = 40000$$

- Conocidas las rigideces procedemos a calcular el coeficiente de distribución de cada una de las barras que llegan al nodo usando la siguiente expresión:

$$\mu_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sum K_{ij}}$$

Donde:

$$\sum K_{ij} = K_{DA} + K_{DB} + K_{DC} = 133333.33$$

Así se tiene:

$$\mu_{DA} = \frac{K_{i2}}{\sum K_{ij}} = \frac{53333.33}{133333.33} = 0.4$$

$$\mu_{DB} = \frac{K_{i2}}{\sum K_{ij}} = \frac{40000}{133333.33} = 0.3$$

$$\mu_{DC} = \frac{K_{i2}}{\sum K_{ij}} = \frac{40000}{133333.33} = 0.3$$

Verificando,  $\sum \mu_{ij} = 0.4 + 0.3 + 0.3 = 1$  en el nodo D.

- Conocidos los factores de distribución de cada una de las barras del nodo procedemos a calcular el

aporte del Momento resistente de cada una de las barras por medio de la siguiente expresión:

$$M_{ij} = \mu_{ij} \cdot (-M_i)$$

Aplicando este concepto:

$$M_{DA} = \mu_{DA} \times (-M_D) = 0.4 \times (-120) = -48KN - m$$

$$M_{DB} = \mu_{DB} \times (-M_D) = 0.3 \times (-120) = -36KN - m$$

$$M_{DC} = \mu_{DC} \times (-M_D) = 0.3 \times (-120) = -36KN - m$$

- Comprobando el equilibrio del nodo:

$$\sum M^{nodo} = M_D + M_{DA} + M_{DB} + M_{DC}$$

$$\sum M^{nodo} = 120 - 48 - 36 - 36 = 0$$

- Por último se calcula el valor de los momentos transmitidos  $M_{ji}$  al extremo opuesto de cada barra. Para esto se hace uso del coeficiente de transmisión, que en este caso es igual a 0.5:

$$M_{AD} = 0.5 \times M_{DA} = 0.5 \times (-48) = -24KN - m$$

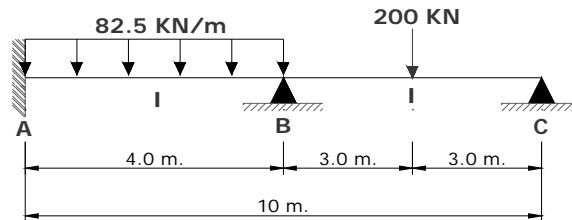
$$M_{BD} = 0.5 \times M_{DB} = 0.5 \times (-36) = -18KN - m$$

$$M_{CD} = 0.5 \times M_{DC} = 0.5 \times (-36) = -18KN - m$$

**3.6.1 Análisis de vigas continuas sin desplazamiento relativo entre nodos:** A continuación se desarrollan algunos ejercicios significativos para el entendimiento de la aplicación del método de cross en vigas.

**Ejemplo 3.2:**

Calcular los Momentos extremos de cada uno de los elementos que conforman la siguiente estructura



Solución:

- Cálculo de rigideces de las barras

$$K_{AB} = \frac{4 \times EI_{AB}}{L_{AB}} = \frac{4 \times EI}{4} = 1 \cdot EI$$

$$K_{BC} = \frac{4 \times EI_{BC}}{L_{BC}} = \frac{4 \times EI}{6} = \frac{2}{3} \cdot EI$$

- Cálculo de factores de distribución en los nodos

Nodo A:

El factor de distribución para un extremo empotrado es igual a  $\mu_{AB} = 0$  (Sección 3.4)

Nodo B:

$$\mu_{BA} = \frac{K_{AB}}{(K_{AB} + K_{BC})} = \frac{1 \cdot EI}{(1 \cdot EI + \frac{2}{3} \cdot EI)} = 0.6$$

$$\mu_{BC} = \frac{K_{BC}}{(K_{AB} + K_{BC})} = \frac{\frac{2}{3} \cdot EI}{(1 \cdot EI + \frac{2}{3} \cdot EI)} = 0.4$$

$$\sum \mu_{ij} = 0.6 + 0.4 = 1$$

Nodo C:

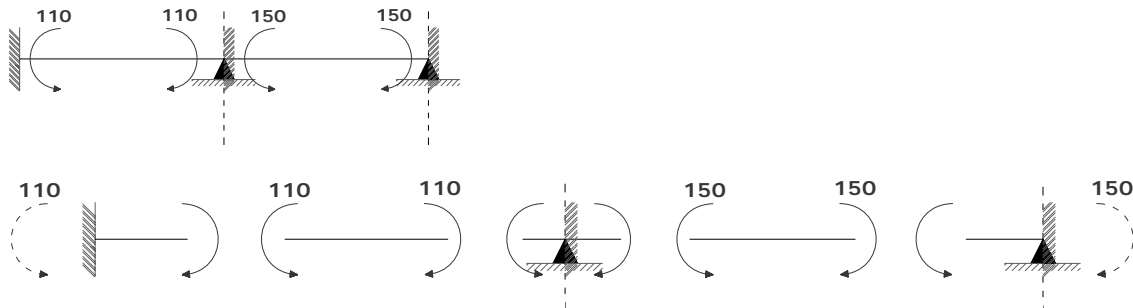
El factor de distribución para un extremo simplemente apoyado es igual a  $\mu_{CB} = 1$

- Cálculo de Momentos de empotramiento

Considerando todos los nodos empotrados, los momentos de empotramiento son:

$$M_{AB}^F = -M_{BA}^F = \frac{W \cdot L^2}{12} = \frac{82.5 \times 4^2}{12} = 110 \text{ KN-m.}$$

$$M_{BC}^F = -M_{CB}^F = \frac{P \cdot L}{8} = \frac{200 \times 6}{8} = 150 \text{ KN-m.}$$



- Proceso iterativo

### **Importante:**

Para hacer los cálculos de una manera práctica, ordenada y controlada mediante el método de Cross, se recomienda usar el esquema de la viga o pórtico como guía, tal cual como se muestra a continuación.

	<b>A</b>		<b>B</b>		<b>C</b>
Factor de Distribución	0.0	0.6	0.4		1.0
Momentos de Empotramiento [KN-m]	110	-110	150		-150

Al realizar la sumatoria de momentos en los nodos, se obtiene un momento de disequilibrio en cada uno de ellos. Sin embargo, estos momentos no pueden permanecer en la estructura porque alterarían las condiciones reales del problema. Aquí se inicia el proceso de equilibrar los nodos que realmente pueden rotar, que en este caso son los nodos B y C.

- Equilibrio de los nodos

Antes de iniciar, es importante definir los siguientes términos:

$M_{des}^i$  = Momento de disequilibrio en el nodo i.

$M_{equi}^i$  = Momento de equilibrio en el nodo i.

$M_{trans}^i$  = Momento transmitido al nodo i.

Aun considerando todos los nodos de la estructura empotrados, liberamos del empotramiento ficticio el nodo más disequilibrado, esto con el fin de que el sistema converja lo mas rápido a los momentos definitivos. Para esto planteamos una sumatoria de momentos en cada uno de los nodos que pueden rotar.

$$\sum M_{nodo} B = -M_{BA}^F + M_{BC}^F = -110 + 150 = 40KN - m.$$

$$\sum M_{nodo} C = -M_{CB}^F = -150KN - m.$$

Entonces, el nodo B presenta un momento de disequilibrio  $M_{des}B = 40KN - m.$ , mientras el nodo C, el cual es el más disequilibrado, tiene  $M_{des}C = -150KN - m.$

Para equilibrar el nodo C es necesario aplicar un momento de equilibrio ( $M_{equi}C$ ) de igual magnitud que el momento de disequilibrio ( $M_{des}C$ ) pero de signo contrario.

$$M_{equi}C = -M_{des}C$$

$$M_{equi}C = -(-150)KN - m. = 150KN - m.$$

Para saber que cantidad de este momento de equilibrio fue producido por cada barra que llega al nodo, simplemente multiplicamos el momento  $M_{equi}C$  por los coeficientes de distribución de cada barra. Como este nodo solo tiene el extremo C de la barra BC, solo hay un coeficiente de distribución  $\mu_{CB} = 1.$

$$M_{CB} = M_{equi}C \cdot \mu_{CB} = 150 \cdot 1 = 150KN - m.$$

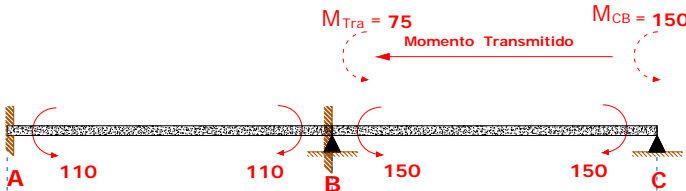
Esto quiere decir que el extremo CB produce todo el momento de equilibrio  $M_{equi}C$ .

- **Transmisión de momentos**

Una vez se tiene equilibrado el nodo C, aparece el momento  $M_{CB}$  en el extremo C de la barra BC, lo que induce un momento en el extremo empotrado opuesto (B) igual a  $\frac{1}{2}$  ( $M_{CB}$ ).

$$M_{trans}B = \frac{1}{2}M_{CB} = 0.5(150) = 75KN - m.$$

En la siguiente grafica se representa todo el procedimiento realizado anteriormente:



Factor de Distribución	0.0	0.6	0.4	1.0
Momentos de Empotramiento [KN-m]	110	-110	150	-150
Momentos distribuidos de equilibrio [KN-m]				150
Momentos Transmitidos [KN-m]		75		

- El nodo C se considera nuevamente empotrado y se libera el nodo B para equilibrarlo. El momento de desequilibrio que presenta este nodo es la suma (*teniendo en cuenta los signos*) de los momentos de empotramiento ( $M_{BA}^F, M_{BC}^F$ ) y el momento transmitido al nodo B del nodo C ( $M_{trans}B$ ).

$$\sum M_{nodo} B = -M_{BA}^F + M_{BC}^F + M_{trans}B = -110 + 150 + 75 = 115KN - m.$$

$$M_{des}B = 115KN - m.$$

Entonces el momento de equilibrio será  $M_{equi}B = -M_{des}B = -(115KN - m)$ . Este momento se distribuye a los extremos B de cada una de las barras que llegan al nodo en proporción a sus factores de distribución.

$$M_{BA} = M_{equi}B \cdot \mu_{BA} = -115 \cdot 0.6 = -69KN - m.$$

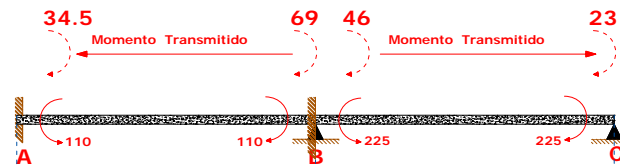
$$M_{BC} = M_{equi}B \cdot \mu_{BC} = -115 \cdot 0.4 = -46KN - m.$$

Nuevamente se transmite la mitad de cada uno de los momentos a sus extremos opuestos (A y C):



$$M_{trans} A = \frac{1}{2} M_{BA} = 0.5(-69) = -34.5 \text{ KN} - m.$$

$$M_{trans} C = \frac{1}{2} M_{BC} = 0.5(-46) = -23.0 \text{ KN} - m.$$



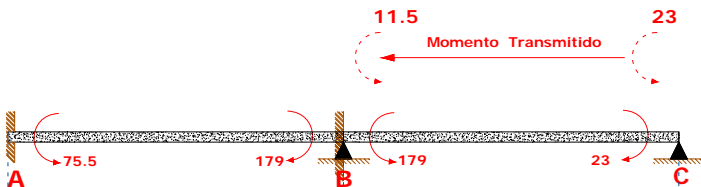
Factor de Distribución	0.0	0.6	0.4	1.0
Momentos de Empotramiento [KN-m]	110	-110	150	-150
Momentos distribuidos de equilibrio [KN-m]				150
Momentos Transmitidos [KN-m]			75	150
Momento distribuido de equilibrio [KN-m]			-69	-46
Momentos Transmitidos [KN-m]	-34.5			-23

Una vez equilibrado el nodo B y transmitido los momentos a los extremos opuestos, se considera nuevamente empotrado. Se procede a buscar un nuevo nodo para equilibrar. El *nodo A “no”* se libera debido a su estado real de empotramiento, así que todos los momentos que llegan a este nodo son absorbidos en su totalidad por el empotramiento.

- Se equilibra nuevamente el nodo C, el cual se desequilibró por el momento transmitido de B a C ( $M_{des} C = -23.0 \text{ KN} - m$ ). Aplicando el momento de equilibrio  $M_{equi} C = 23.0 \text{ KN} - m$ , se distribuye en el nodo  $M_{CB} = 23 \text{ KN} - m$  y se transmite la mitad al nodo B  $M_{trans} B = 11.5 \text{ KN} - m$ .

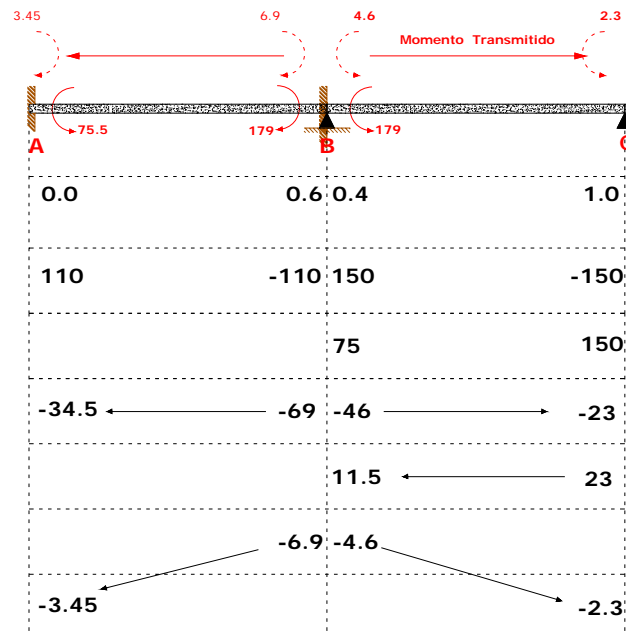
- Equilibrando nuevamente el nodo B, el cual se desequilibró por el momento transmitido de C a B ( $M_{trans} B = 11.5 \text{ KN} - m$ ). Se aplica el momento de equilibrio  $M_{equi} B = -11.5 \text{ KN} - m$ , se distribuye en el nodo ( $M_{BA} = -6.9 \text{ KN} - m$ ),

$M_{BC} = -4.6 \text{ KN-m}$ ) y se transmite la mitad al nodo A y al nodo C  
 ( $M_{trans} A = -3.45 \text{ KN-m}$ ,  $M_{trans} C = -2.3 \text{ KN-m}$ .)



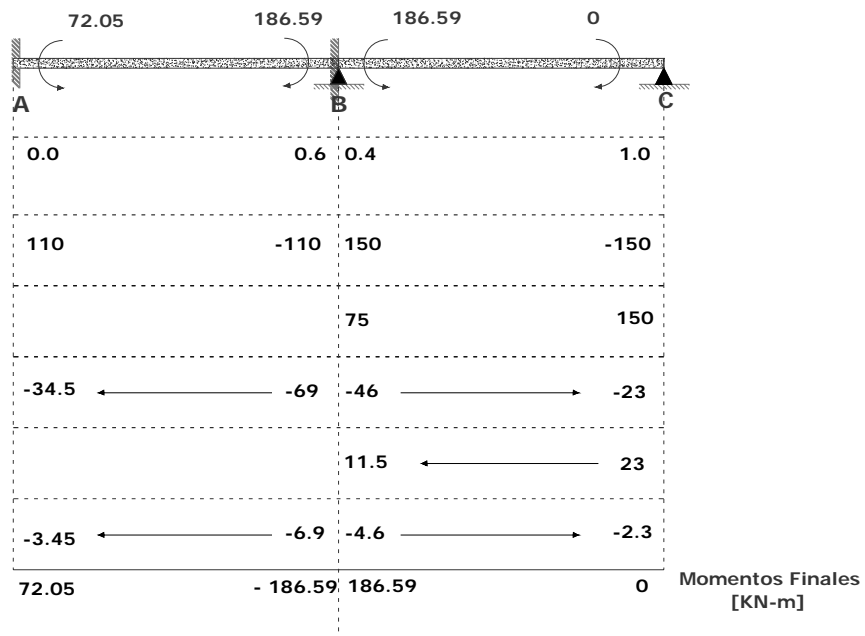
Factor de Distribución	0.0	0.6	0.4	1.0
Momentos de Empotramiento [KN-m]	110	-110	150	-150
Momentos distribuidos de equilibrio [KN-m]				150
Momentos Transmitidos [KN-m]			75	150
Momento distribuido de equilibrio [KN-m]	-34.5	-69	-46	-23
Momentos Transmitidos [KN-m]			11.5	23

- Equilibraremos nuevamente el nodo B, el cual se desequilibró por el momento transmitido de C a B ( $M_{des} B = 11.5 \text{ KN-m}$ ). Aplicamos el momento de equilibrio  $M_{equi} B = -11.5 \text{ KN-m}$ , lo distribuimos en el nodo ( $M_{BA} = -6.9 \text{ KN-m}$ ,  $M_{BC} = -4.6 \text{ KN-m}$ ) y transmitimos la mitad al nodo A y al nodo C ( $M_{trans} A = -3.45 \text{ KN-m}$ ,  $M_{trans} C = -2.3 \text{ KN-m}$ .)

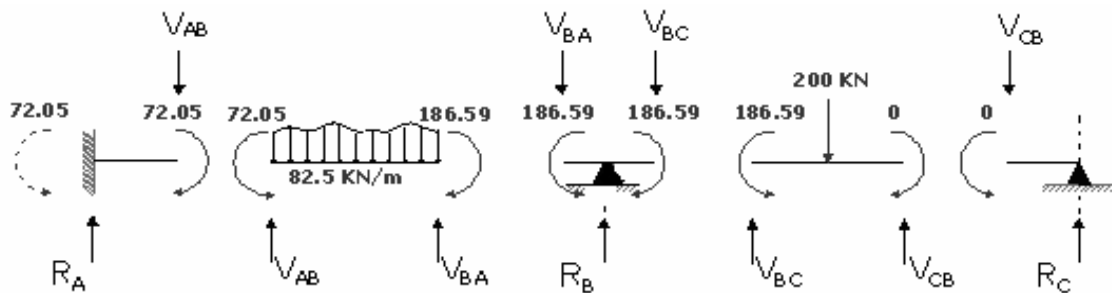


Como se puede observar, los momentos transmitidos y los momentos de disequilibrio se van haciendo cada vez más pequeños. Se puede seguir haciendo este procedimiento tantas veces según sea el grado de precisión deseado. En los ejercicios desarrollados en este capítulo se detendrán las iteraciones hasta que el valor de los últimos momentos distribuidos sean cercanos al 1% del mayor valor de los momentos de empotramiento iniciales.

A continuación se muestra el proceso iterativo completo y los momentos finales (estos se calculan simplemente sumando las columnas de cada extremo de las barras *teniendo en cuenta los signos de los valores*):



Una vez conocidos los momentos en los extremos de las barras, se plantean los diagramas de cuerpo libre de cada una de las barras para calcular el valor de los cortantes y de las reacciones de la estructura como se muestra a continuación:



Tramo AB

$$\sum M_A = M_{AB} + M_{BA} + 4V_{BA} - \frac{4^2 \cdot 82.5}{2} = 0$$

$$0 = 72.05 - 186.59 + 4V_{BA} - 660$$

$$V_{BA} = 193.64 \text{ kN}$$

$$\sum F_Y = 0 = V_{AB} + V_{BA} - 4 \cdot 82.5$$

$$0 = V_{AB} + 193.64 - 330$$

$$V_{AB} = 136.36 \text{ KN}$$

Tramo BC

$$\sum M_B = M_{BC} + M_{CB} - 6V_{CB} + 200 \cdot 3$$

$$0 = 186.59 + 0 - 6V_{CB} + 600$$

$$V_{CB} = 131.10 \text{ KN}$$

$$\sum F_Y = 0 = V_{BC} + V_{CB} - 200$$

$$0 = V_{BC} + 131.10 - 200$$

$$V_{BC} = 68.9 \text{ KN}$$

Reacciones

Nodo A

$$\sum F_Y = 0 = R_A + V_{AB}$$

$$0 = R_A - 136.36$$

$$R_A = 136.36 \text{ KN}$$

Nodo B

$$\sum F_Y = 0 = R_B + V_{BA} - V_{BC}$$

$$0 = R_B - 193.64 - 131.1$$

$$R_B = 324.74 \text{ KN}$$

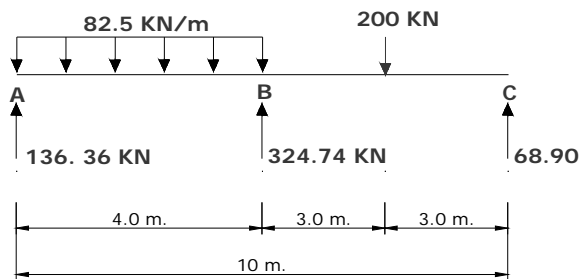
Nodo C

$$\sum F_Y = 0 = R_C - V_{CB}$$

$$0 = R_C - 68.90$$

$$R_C = 68.90 \text{ KN}$$

Una vez conocidos los valores de las reacciones, se plantea el equilibrio de toda la estructura:



$$\sum M_A = 72.05 - \frac{82.05 \cdot 4^2}{4} + 324.74 \cdot 4 - 200 \cdot 7 + 68.9 \cdot 10$$

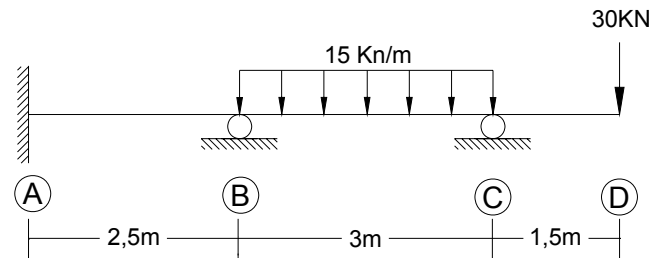
$$\sum M_A = 0$$

Esto se hace con el fin de comprobar que los valores obtenidos son correctos.

Ejemplo 3.3:

Determinar el valor de los momentos en los extremos de cada una de las barras.

Considere  $EI$  constante.



Este ejemplo se desarrollara de la misma manera como se hizo el ejercicio anterior.

Para el análisis del voladizo, simplemente se calcula el valor del momento en el extremo CD y el coeficiente de distribución para este extremo será 0 ( $\mu_{CD} = 0$ ), mientras que el coeficiente de distribución para el extremo CB será igual a 1 ( $\mu_{CB} = 1$ ).

- Cálculo de rigideces

$$K_{AB} = \frac{4EI}{2.5} = 1.6EI$$

$$K_{BC} = \frac{4EI}{3} = 1.33EI$$

$$K_{CD} = \frac{4EI}{1.5} = 2.67EI$$

- Factores de distribución

$$\mu_{AB} = 0 \text{ (Apoyo empotrado)}$$

$$\mu_{BA} = \left( \frac{K_{BA}}{K_{BA} + K_{BC}} \right) = \left( \frac{1.6}{1.6 + 1.33} \right) = 0.55$$

$$\mu_{BC} = \left( \frac{1.33}{1.6 + 1.33} \right) = 0.45$$

$\mu_{CB} = 1$  (Condición de apoyo simple)

$\mu_{CD} = 0$  (Condición de voladizo)

- Momentos de empotramiento

$$M_{BC} = -M_{CB} = \frac{15 \cdot (3)^2}{12} = 11.25 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

$$M_{CD \text{ vol.}} = (30)(1.5) = 45 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

- Proceso iterativo

En el siguiente cuadro se muestra el proceso iterativo realizado para solucionar la viga. El orden en que se equilibraron los nodos fue el siguiente: C – B – C – B. Las flechas presentes en el diagrama de iteración señalan los momentos transmitidos desde los extremos opuestos.

1 Extremos elementos	<b>AB</b>	<b>BA</b>	<b>BC</b>	<b>CB</b>	<b>CD</b>	
2 Factores de distribucion	0	0.55	0.45	1	0	
3 Momentos Empotramiento	0	0	11.25	-11.25	45	
4 Equilibrio Nodos				-33.75		
5 Traslacion			-16.88			
6 Equilibrio Nodos		3.10	2.53			
7 Traslacion	1.55			1.27		
8 Equilibrio Nodos				-1.27		
9 Traslacion			-0.64			
10 Equilibrio Nodos		0.35	0.29			
<b>Momentos Finales</b>	1.55	3.45	-3.45	-45	45	( KN - m )

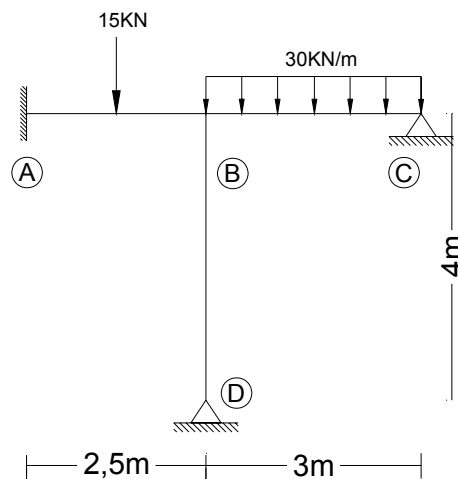
### 3.7 ANÁLISIS DE PÓRTICOS SIN DESPLAZAMIENTO RELATIVO ENTRE NODOS

El procedimiento de aplicación del método de la distribución de momentos a pórticos de nudos rígidos estáticamente indeterminados cuando no hay desplazamiento de nodos,



puede realizarse de la misma manera como se hizo en la solución de vigas (3.1.2). La única diferencia que presenta el análisis de los pórticos, es que a los nodos pueden llegar más de dos barras, entonces simplemente se distribuye el valor del momento de equilibrio del nodo entre las barras que concurren proporcionalmente a los factores de distribución  $\mu_{ij}$ .

### Ejemplo 3.4



- Dimensiones de elementos (  $b \times h$  )

Vigas: 30 x 35 (cm x cm)

Columnas: 50 x 50 (cm x cm)

- Modulo de elasticidad

$$E = 19 \text{ MPa} = 19 \times 10^3 \text{ KN/m}^2$$

- Calculo de inercias:

- Vigas:

$$I = \frac{1}{12} b \cdot h^2 = \frac{1}{12} (0.3) \cdot (0.35)^3 = 1.07 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

- Columnas:

$$I = \frac{1}{12} (0.50)^4 = 5.21 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

a. Rigidez de cada barra:

$$K_{AB} = \frac{4(19 \times 10^3)(1.07 \times 10^{-3})}{2.5} = 32.53$$

$$K_{BC} = \frac{4(19 \times 10^3)(1.07 \times 10^{-3})}{3} = 27.11$$

$$K_{BD} = \frac{4(19 \times 10^3)(5.21 \times 10^{-3})}{4} = 100.13$$

• Momentos de empotramiento:

$$M_{AB} = -M_{BA} = \frac{P \cdot L}{8} = \frac{15 \cdot (2.5)}{8} = 4.69 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BC} = -M_{CB} = \frac{W \cdot L^2}{12} = \frac{30 \cdot (3)^2}{12} = 22.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

• Factores de distribución

$\mu_{AB} = 0$  (Apoyo empotrado)

$$\mu_{BA} = \left( \frac{K_{BA}}{K_{BA} + K_{BC} + K_{BD}} \right) = \left( \frac{32.52}{32.52 + 27.11 + 98.99} \right) = 0.20$$

$$\mu_{BC} = \left( \frac{27.11}{158.62} \right) = 0.17$$

$$\mu_{BD} = \left( \frac{98.99}{158.62} \right) = 0.63$$

$$\mu_{DB} = 1 \text{ (Apoyo simple)}$$

$$\mu_{CB} = 1 \text{ (Apoyo simple)}$$

- Proceso iterativo

El proceso iterativo se realizara la misma forma como se hace para el caso de las vigas. El orden en que se equilibraron los nodos fue el siguiente: C – B – C – D – B – C – D – B – C – D – B.

El proceso iterativo se presenta en el siguiente cuadro. Las flechas presentes en el diagrama de iteración señalan los momentos transmitidos desde los extremos opuestos.

- 1 Extremos elementos
- 2 Factores de distribucion
- 3 Momentos Empotramiento
- 4 Equilibrio Nodos
- 5 Traslacion
- 6 Equilibrio Nodos
- 7 Traslacion
- 8 Equilibrio Nodos
- 9 Traslacion
- 10 Equilibrio Nodos
- 11 Traslacion
- 12 Equilibrio Nodos
- 13 Traslacion
- 14 Equilibrio Nodos
- 15 Traslacion
- 16 Equilibrio Nodos
- 17 Traslacion
- 18 Equilibrio Nodos

**Momentos Finales**

<i>AB</i>	<i>BA</i>	<i>BD</i>	<i>BC</i>	<i>CB</i>
0	0.2	0.63	0.17	1
4.69	-4.69	0	22.50	-22.50
			11.25	22.50
	-5.81	-18.31	-4.94	
-2.91				-2.47
			2.47	
		4.58	1.24	
	-1.16	-3.66	-0.99	
-0.58				-0.49
				0.49
		0.92	0.25	
	-0.23	-0.73	-0.20	
-0.12				-0.10
				0.10
		0.18	0.05	
	-0.05	-0.15	-0.04	
1.086	-11.94	-17.176	29.12	0

( KN - m )

- 1 Traslacion Nodo BD
- 2 Equilibrio Nodos
- 3 Traslacion Nodo BD
- 4 Equilibrio Nodos
- 5 Traslacion Nodo BD
- 6 Equilibrio Nodos

**Momentos Finales**

<i>BD</i>
1
-9.15
9.15
-1.83
1.83
-0.37
0.37
0

( KN - m )

### 3.8 SIMPLIFICACIONES PARA EL MÉTODO DE CROSS

Es importante señalar que las simplificaciones mencionadas a continuación se pueden realizar en cualquier método de análisis estructural y no son una característica del método de Cross.

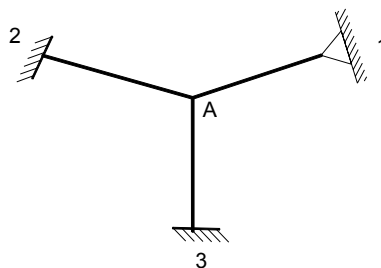
A continuación se presentaran algunas simplificaciones importantes utilizadas en el método de Cross para disminuir el número de iteraciones realizadas en la solución de un ejercicio.

Las simplificaciones expuestas son:

- Simplificación por extremo Articulado
- Simplificación por simetría

#### 3.8.1 Simplificación por extremo Articulado

**Figura 38:** Simplificación de Estructura por Extremo Articulado

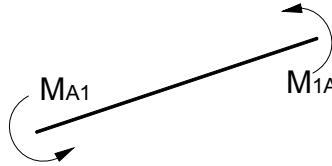


Como se muestra en la figura anterior, las tres barras  $A1$ ,  $A2$ ,  $A3$  concurren al nodo rígido  $A$ . Los extremos 2 y 3 son empotrados mientras que el extremo 1 presenta una articulación. Esta condición de apoyo simple ayudara a reducir notablemente el número de iteraciones realizadas para solucionar una estructura mediante el método de Cross.

Considérese un momento  $M_A$  aplicado en el nodo  $A$ . Como se sabe, este momento hace que el nodo rote hasta su posición de equilibrio y a su vez que se generen

momentos internos en cada una de las barras. Si se separa la barra A1 para su análisis, se tiene:

**Figura 39:** Análisis de la barra A1



Como se puede apreciar, la barra presenta momentos en sus extremos ( $M_{A1}$  y  $M_{1A}$ ). Haciendo uso de las ecuaciones de momentos extremos para una barra prismática vistas en el capítulo de **Slope – Deflection**, se tiene:

$$M_{A1} = \frac{4EI}{L}\theta_A + \frac{2EI}{L}\theta_1$$

$$M_{1A} = \frac{2EI}{L}\theta_A + \frac{4EI}{L}\theta_1$$

**Ecuación 3.15**

Los términos de momentos de empotramiento ( $M_{A1}^F, M_{1A}^F$ ) son iguales a **0** debido a que no hay cargas externas aplicadas sobre la barra y el momento debido al desplazamiento relativo entre nodos ( $\frac{6EI}{L^2} \cdot \Delta$ ) también es **0** debido a que no hay desplazamientos en la estructura.

Como se sabe, un apoyo articulado no absorbe momentos. Es decir  $M_{1A} = 0$ , luego:

$$M_{1A} = 0 = \frac{2EI}{L}\theta_A + \frac{4EI}{L}\theta_1$$

Despejando  $\theta_1$  de la ecuación anterior:

$$\theta_1 = -\frac{1}{2}\theta_A$$

**Ecuación 3.16**

Retomando la ecuación del momento para el extremo A ( $M_{A1}$ ) y factorizando el término  $\left(\frac{4EI}{L}\right)$ :

$$M_{A1} = \frac{4EI}{L} \cdot \left( \theta_A + \frac{1}{2}\theta_1 \right)$$

**Ecuación 3.17**

Reemplazando la ecuación 3.16 en la ecuación 3.17:

$$M_{A1} = \frac{4EI}{L} \cdot \left[ \theta_A + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2}\theta_A \right) \right]$$

$$M_{A1} = \frac{4EI}{L} \cdot \left[ \frac{3}{4}\theta_A \right]$$

**Ecuación 3.18**

Reemplazando el término  $\frac{4EI}{L}$  por  $K_{A1}$  y reorganizando la ecuación anterior, se tiene:

$$M_{A1} = \left( \frac{3}{4}K_{A1} \right) \cdot \theta_A$$

**Ecuación 3.19**

Es decir, el factor de rigidez de la barra  $K_{A1}$  se reduce a sus tres cuartas partes  $\left(\frac{3EI}{L}\right)$

al considerar la condición de extremo simplemente apoyado en el apoyo 1. Así, si una estructura tiene alguno de sus extremos articulados, la rigidez de la barra se modificara a sus  $\frac{3}{4}$  partes y con se tiene previsto que el momento en este extremo será 0, y no habrá necesidad de transmitirle momentos a este extremo.

A este factor lo llamaremos *Rigidez modificada* y lo representaremos con el símbolo  $K'$

$$K' = \left( \frac{3}{4} K_{A1} \right)$$

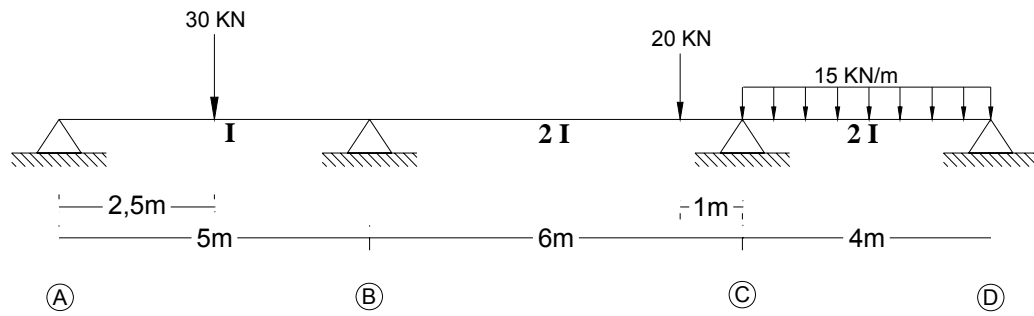
Aplicando este nuevo concepto a la figura inicial:

Como se dijo anteriormente, al aplicar un momento  $M_A$  en el nodo A se produce un desequilibrio en el nodo. Esto hace que aparezca un momento de equilibrio, el cual se reparte en 3 partes proporcionales a  $K_{A2}$ ,  $K_{A3}$  y  $\frac{3}{4}(K_{A1})$ , los cuales actúan sobre la barras A1, A2, A3. La mitad de los momentos de equilibrio del nodo A que actúan sobre las barras A2 y A3 se transmiten a los nodos 2 y 3; no es necesario transmitir momentos al nodo 1 (articulado) ya que al modificar el factor de rigidez de la barra A1 reduciéndolo a las  $\frac{3}{4}$  partes de su valor normal, queda previsto que el momento en el nodo 1 siempre será igual a 0.

*“Cuando una viga continua o un pórtico de nudos rígidos lleva en sus tramos extremos apoyos simples o articulaciones, se puede simplificar el método general de Cross haciendo uso de las rigideces modificadas, obteniendo los mismo resultados y de manera mas rápida”*

### **Ejemplo 3.5**

Determine los momentos extremos en cada uno de los elementos y las reacciones para la viga mostrada.



- Cálculo de la rigidez rotacional

$$K_{AB} = \frac{4(10000)}{5} = 8000$$

$$K'_{AB} = \frac{3}{4} K_{AB} = \frac{3}{4}(8000) = 6000$$

$$K_{BC} = \frac{4(2 \cdot 10000)}{6} = 13333.33$$

$$K_{CD} = \frac{4(2 \cdot 10000)}{4} = 20000$$

$$K'_{CD} = \frac{3}{4} K_{CD} = \frac{3}{4}(20000) = 15000$$

$$K_{BC} = \frac{4(2 \cdot 10000)}{6} = 13333.33$$

- Factor de distribución

$$\mu_{AB} = \mu_{DC} = 1 \quad (\text{Condición extremo simplemente apoyado})$$

$$\mu_{BA} = \left( \frac{6000}{13333.33 + 6000} \right) = 0.31$$

$$\mu_{BC} = \left( \frac{13333.33}{13333.33 + 6000} \right) = 0.69$$

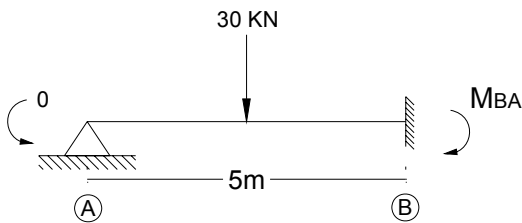
$$\mu_{CB} = \left( \frac{13333.33}{13333.33 + 15000} \right) = 0.47$$

$$\mu_{CD} = \left( \frac{15000}{13333.33 + 15000} \right) = 0.53$$



- Momentos de empotramiento:

- Barra AB



Al considerar la rigidez modificada (  $K'$  ) en la barra AB, ya se tuvo en cuenta que el momento en el extremo A (simplemente apoyado) es cero. Entonces, el momento de empotramiento para esta barra se calculara empotrando solamente su extremo B mientras que su extremo A tendrá su condición real de simplemente apoyado.

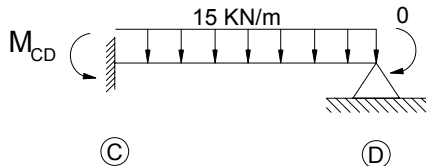
$$M_{BA}^F = -\frac{3}{16} \cdot P \cdot L = -\frac{3}{16} \cdot (30) \cdot (5) = -28.13 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

- Barra BC

$$M_{BC}^F = \frac{20 \cdot (5) \cdot (1)^2}{(6)^2} = 2.78 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

$$M_{CB}^F = -\frac{20 \cdot (5)^2 \cdot (1)}{(6)^2} = -13.89 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

- Barra CD



Esta barra presenta la misma condición de la barra CD.

$$M_{CD}^F = \frac{W \cdot L^2}{8} = \frac{15 \cdot (4)^2}{8} = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

### • Proceso Iterativo

En este ejemplo se realizó el proceso de equilibrio en los nodos B y C simultáneamente.

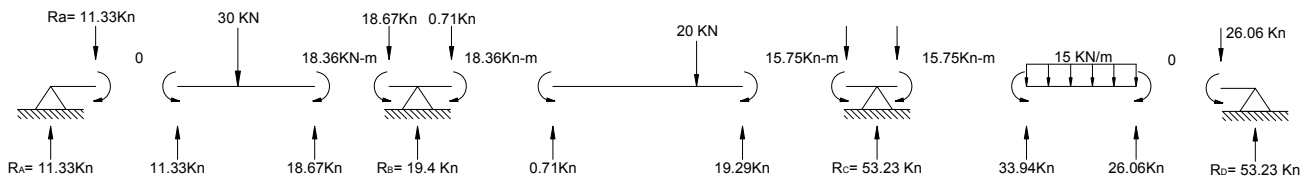
En el siguiente cuadro se muestra el proceso iterativo:

- 1 Extremos elementos
- 2 Factores de distribución
- 3 Momentos Empotramiento
- 4 Equilibrio Nodos
- 5 Traslacion
- 6 Equilibrio Nodos
- 7 Traslacion
- 8 Equilibrio Nodos
- 9 Traslacion
- 10 Equilibrio Nodos

AB	BA	BC	CB	CD	DC
1	0.31	0.69	0.47	0.53	1
0	-28.13	2.78	-13.89	30	0
	7.86	17.49	-7.57	-8.54	
		-3.79	8.75		
	1.17	2.62	-4.11	-4.64	
		-2.06	1.31		
	0.64	1.42	-0.62	-0.69	
		-0.31	0.71		
	0.1	0.21	-0.33	-0.38	

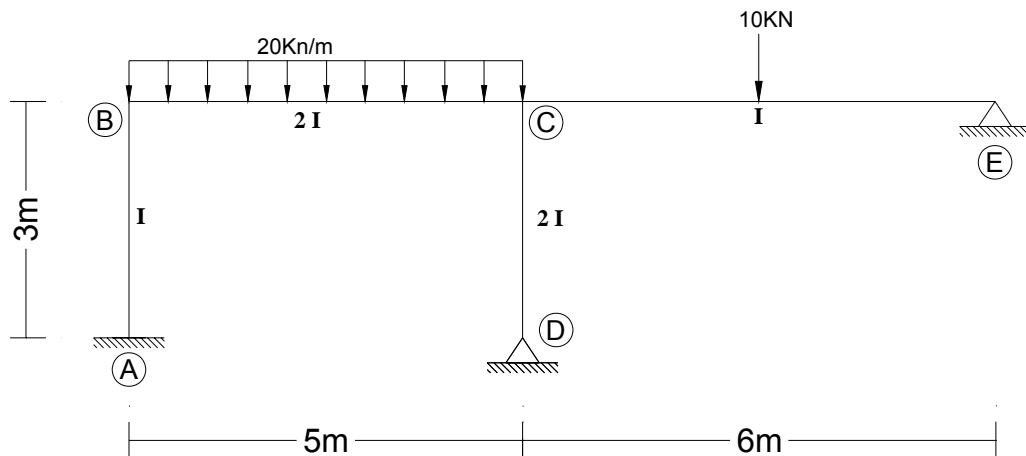
**Momentos Finales**

0	-18.36	18.36	-15.75	15.75	0	( KN - m )
---	--------	-------	--------	-------	---	------------



### Ejemplo 3.6

Determine los momentos extremos en cada uno de los elementos y las reacciones para el pórtico mostrado.



- Calculo de la rigidez rotacional

$$K_{AB} = \frac{4EI}{3} = \frac{4}{3}EI$$

$$K_{BC} = \frac{4E \cdot (2I)}{5} = \frac{8}{5}EI$$

$$K_{CD} = \frac{4E(2I)}{3} = \frac{8}{3}EI \quad K'_{CD} = \frac{3}{4} \cdot K_{CD} = \frac{3}{4} \left( \frac{8}{3}EI \right) = 2EI$$

$$K_{CE} = \frac{4EI}{6} = \frac{2}{3}EI \quad K'_{CE} = \frac{3}{4} \cdot K_{CE} = \frac{3}{4} \left( \frac{2}{3}EI \right) = \frac{1}{2}EI$$

- Factor de distribución:

$$\mu_{AB} = 0 \quad (\text{Empotramiento})$$

$$\mu_{BA} = \left( \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3} + \frac{8}{5}} \right) = 0.45$$

$$\mu_{BC} = \left( \frac{\frac{8}{5}}{\frac{4}{3} + \frac{8}{5}} \right) = 0.55$$

$$\mu_{CB} = \left( \frac{\frac{8}{5}}{\frac{8}{5} + 2 + \frac{1}{2}} \right) = 0.39$$

$$\mu_{CD} = \left( \frac{2}{\frac{8}{5} + 2 + \frac{1}{2}} \right) = 0.49$$

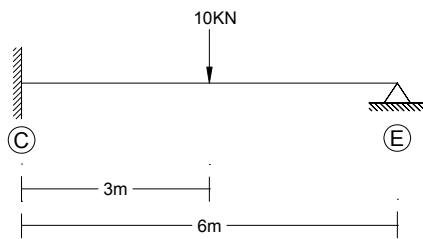
$$\mu_{CE} = \left( \frac{\frac{1}{2}}{\frac{8}{5} + 2 + \frac{1}{2}} \right) = 0.12$$

- **Momentos de empotramiento**

- Barra BC:

$$M_{BC}^F = -M_{CB}^F = \frac{20 \cdot (5)^2}{12} = 41.67 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

- Barra CE



$$M_{CE}^F = \frac{3}{16} P \cdot L = \frac{3}{16} \cdot (10) \cdot (6) = 11.25 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

- **Proceso iterativo**

El orden en que se equilibraron los nodos fue el siguiente: B – C – B – C – B – C. El proceso iterativo se presenta en el siguiente cuadro:

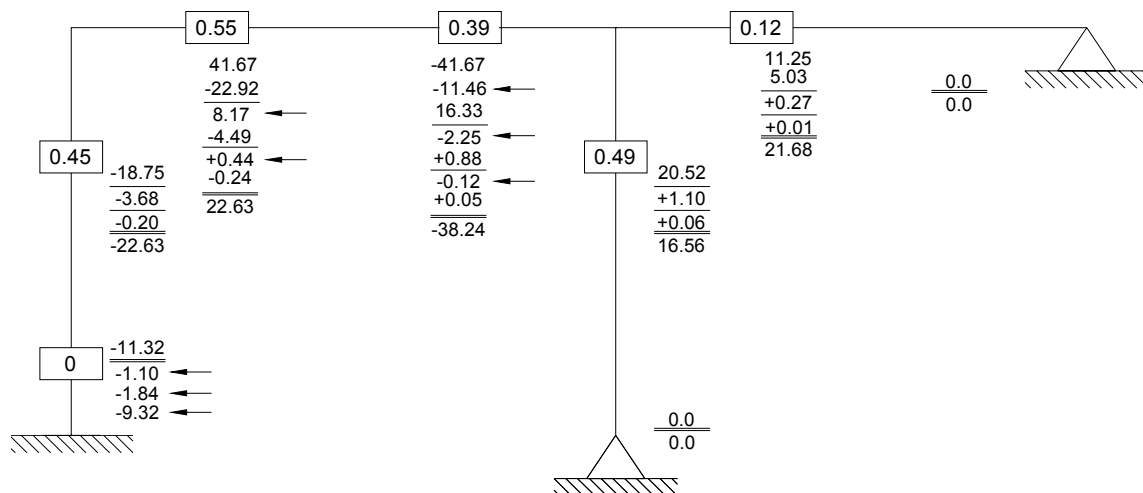
- 1 Extremos elementos
- 2 Factores de distribucion
- 3 Momentos Empotramiento
- 4 Equilibrio Nodos
- 5 Traslacion
- 6 Equilibrio Nodos
- 7 Traslacion
- 8 Equilibrio Nodos
- 9 Traslacion
- 10 Equilibrio Nodos
- 11 Traslacion
- 12 Equilibrio Nodos
- 13 Traslacion
- 14 Equilibrio Nodos

AB	BA	BC	CB	CD	CE	EC
	0.45	0.55	0.39	0.49	0.12	
0	0	41.67	-41.67	0	11.25	0
	-18.75	-22.92				
-9.38			-11.46			
			16.33	20.52	5.03	
		8.17				
	-3.68	-4.49				
-1.84			-2.25			
			0.88	1.10	0.27	
		0.44				
	-0.20	-0.24				
-0.1			-0.12			
			0.05	0.06	0.01	

**Momentos Finales**

-11.32	-22.63	22.63	-38.24	21.68	16.56	0
--------	--------	-------	--------	-------	-------	---

Otra forma en la que se puede desarrollar el proceso iterativo, es haciendo uso del esquema del pórtico como se muestra a continuación:



$$M_{AB} = -11.32 \text{ kN} - \text{m}$$

$$M_{BA} = -22.63 \text{ kN} - \text{m}$$

$$M_{BC} = 22.63 \text{ kN} - \text{m}$$

$$M_{CB} = -38.24 \text{ kN} - \text{m}$$

$$M_{CD} = 21.68 \text{ kN} - \text{m}$$

$$M_{DC} = 0 \text{ kN} - \text{m}$$

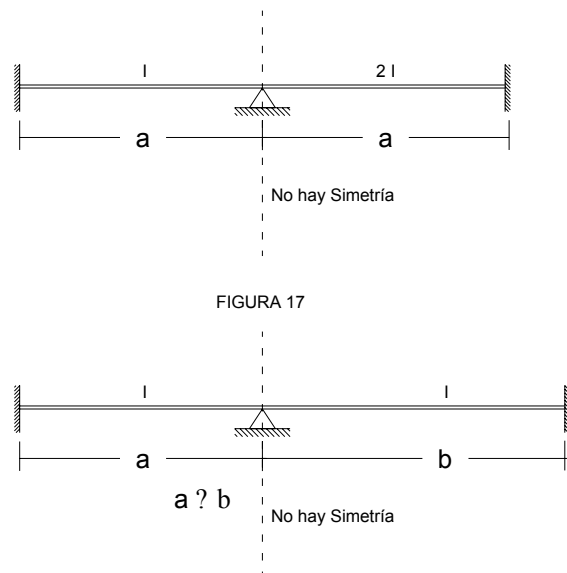
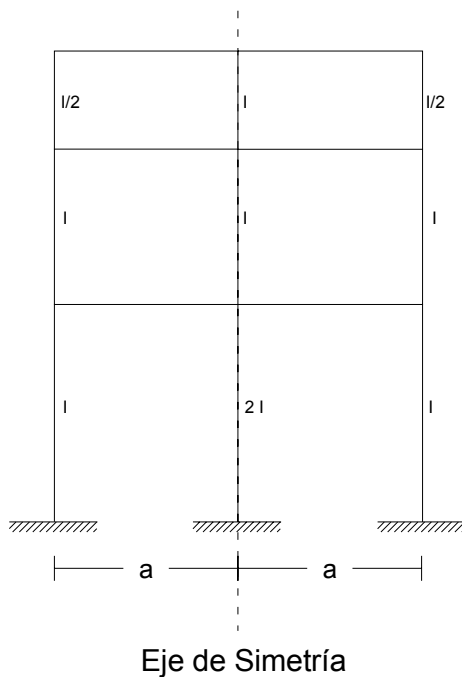
$$M_{C E} = 16.56 \text{ kN} - \text{m} \quad M_{E C} = 0 \text{ kN} - \text{m}$$

### 3.8.2 Simplificación por simetría

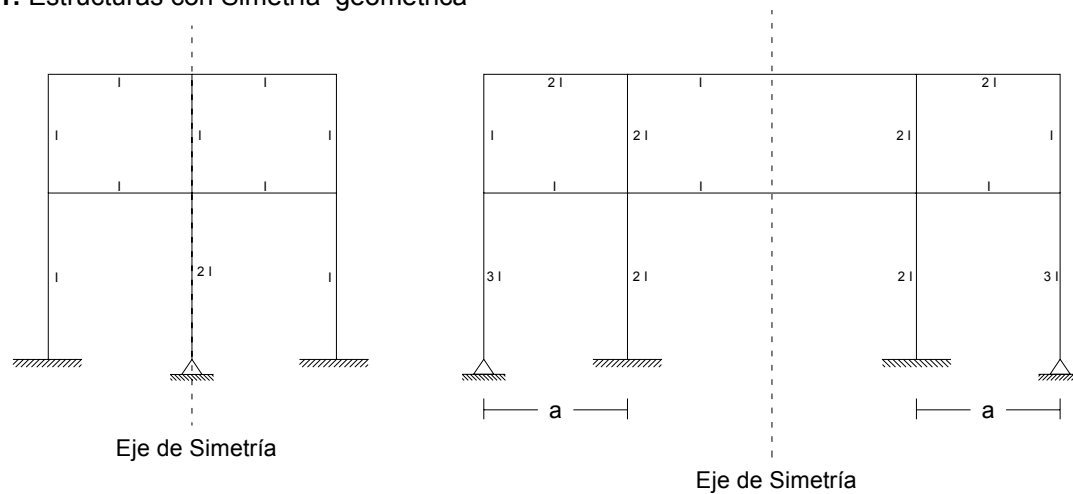
Para que una estructura pueda ser considerada como simétrica debe cumplir simultáneamente las siguientes condiciones:

**3.8.2.1. Debe tener simetría geométrica:** es decir, las secciones a la izquierda y a la derecha del eje de simetría deben ser iguales. Así por ejemplo:

**Figura 40:** Estructuras con Simetría geométrica

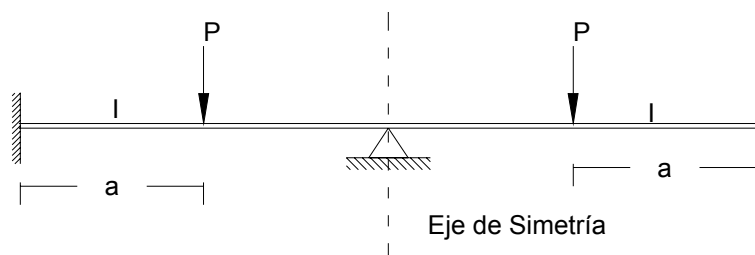


**Figura 41:** Estructuras con Simetría geométrica

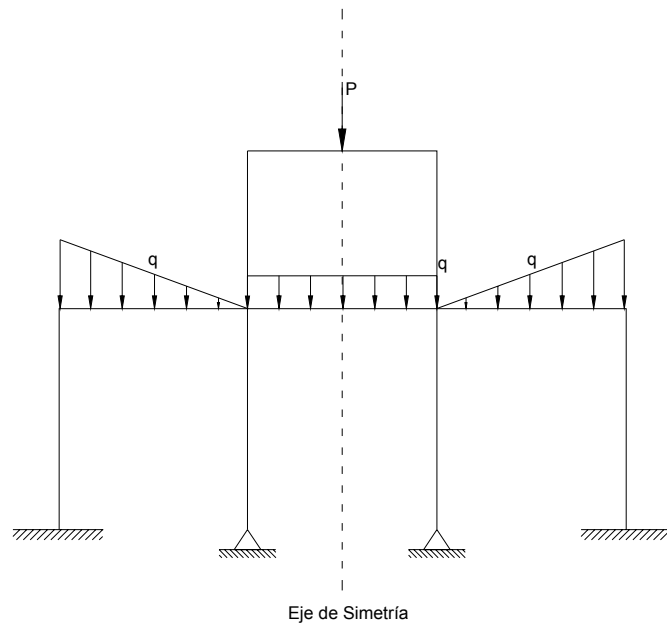


**3.8.2.2. Debe tener simetría de Cargas:** es decir, las cargas a la izquierda y a la derecha del eje de simetría deben ser iguales. Así por ejemplo:

**Figura 42:** Estructura con Simetría de Cargas



**Figura 43:** Pórtico con Simetría de cargas



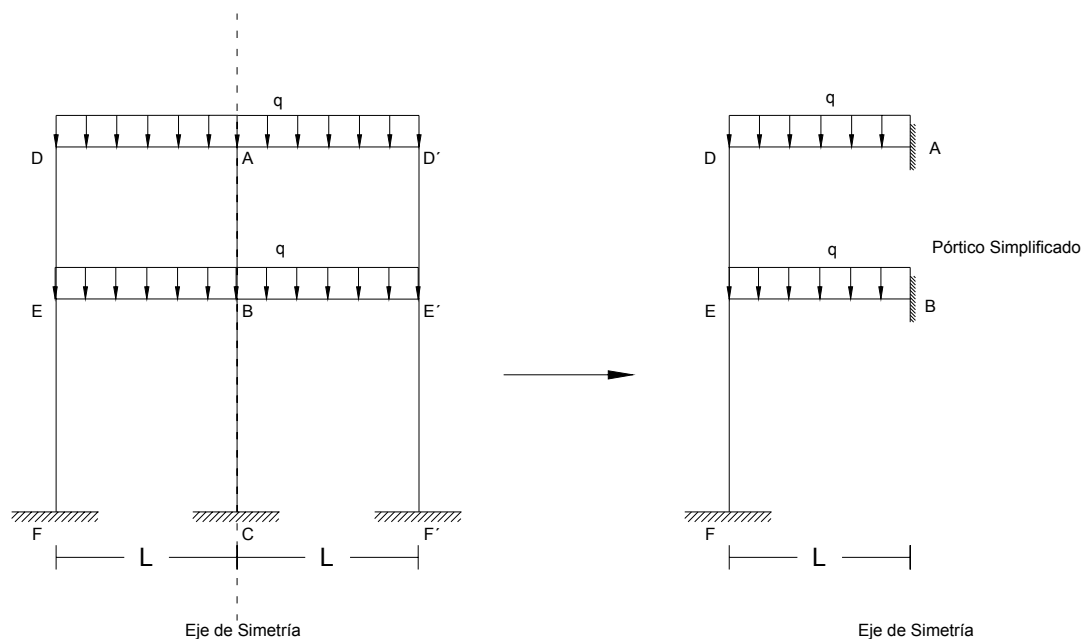
Por otra parte, cuando una estructura es simétrica pueden presentarse dos casos:

- Que la estructura tenga un número par de luces
- Que la estructura tenga un número impar de luces.

**3.8.2.3 Simplificación por simetría – Número par de luces:** Cuando una estructura es simétrica y tiene un número par de luces, el eje de simetría corta a la estructura en su columna o apoyo intermedio. Esto equivale a decir que la rotación en los elementos cortados por el eje de simetría es cero, por lo que la estructura puede considerarse empotrada en dichos elementos (normalmente nudos). Gráficamente:

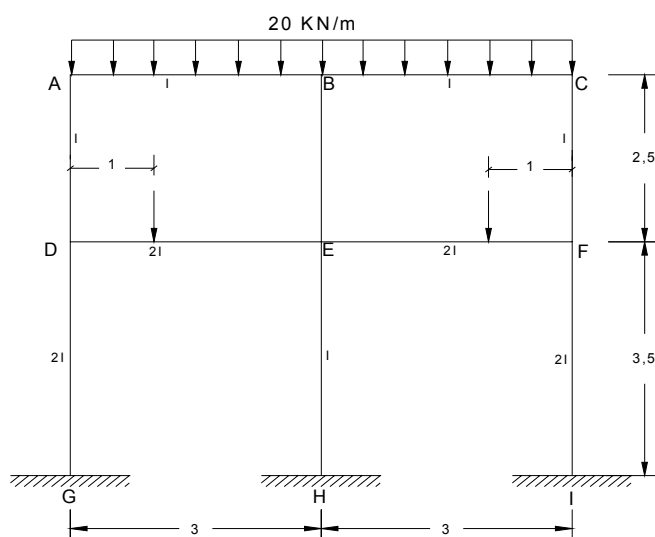


**Figura 44:** Estructura Inicial y Estructura Simplificada por Simetría



### Ejemplo 3.7

Resolver el pórtico indicado en la figura. Esto es, hallar los diagramas de fuerza cortante y momento flector así como las reacciones, haciendo uso de la simetría de la estructura si es posible.



Se trata aquí de un caso de simetría número par de luces (hay tanto simetría de cargas como simetría geométrica). Nótese que el eje de simetría corta las columnas centrales por lo que basta suponer que los nudos B y E están empotrados.

- **Rigidez de las barras:**

$$K_{AB} = \frac{4EI}{3} = \frac{4}{3}EI = 1.33EI$$

$$K_{AD} = \frac{4EI}{2.5} = \frac{8}{5}EI = 1.60EI$$

$$K_{DE} = \frac{4E(2I)}{3} = \frac{8}{3}EI = 2.67EI$$

$$K_{DG} = \frac{4E(2I)}{3.5} = \frac{16}{14}EI = 1.14EI$$

$$\mu_{BA} = \mu_{ED} = \mu_{GD} = 0 \text{ (Empotramiento)}$$

- **Coefficientes de distribución:**

$$\mu_{AB} = \left( \frac{1.33}{1.33 + 1.60} \right) = 0.45$$

$$\mu_{AD} = \left( \frac{1.60}{1.99} \right) = 0.55$$

$$\mu_{DA} = \left( \frac{1.60}{1.66 + 2.67 + 1.14} \right) = 0.30$$

$$\mu_{DE} = \left( \frac{2.67}{5.41} \right) = 0.49$$

$$\mu_{DG} = \left( \frac{1.14}{5.41} \right) = 0.21$$

- **Momentos de empotramiento:**

$$M_{AB} = -M_{BA} = \frac{20 \cdot (3)^2}{12} = 15 \text{ kN} - \text{m}.$$

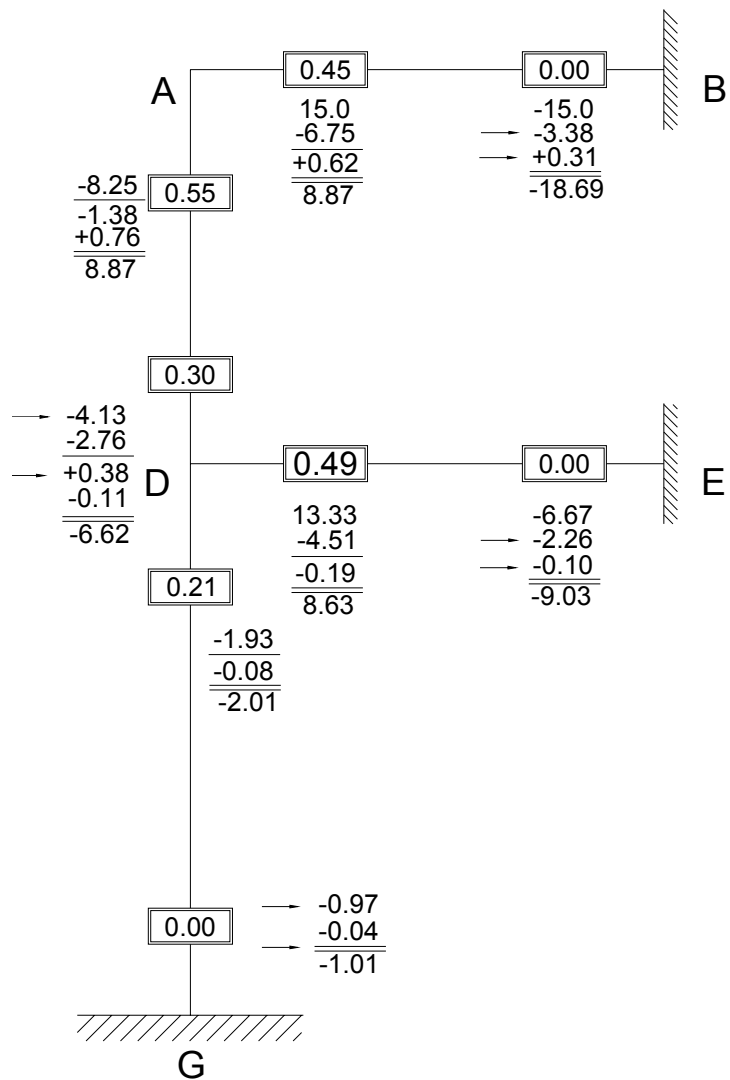
$$M_{DE} = \frac{30 \cdot (1) \cdot (2)^2}{3^2} = 13.33 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M_{ED} = -\frac{30 \cdot (1)^2 \cdot (2)}{3^2} = -6.67 \text{ kN} - \text{m}.$$

- **Proceso Iterativo**

El orden en que se realizó el proceso de equilibrar los nodos fue el siguiente: A – D – A – D.

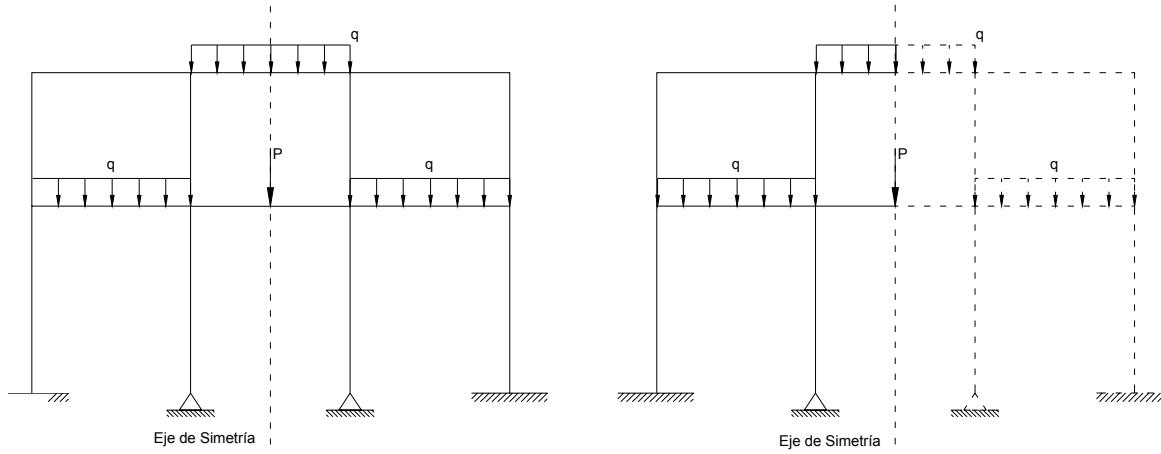
A continuación se muestra el esquema de cálculos:



### 3.8.2.4 Simplificación por simetría – Numero impar de luces

Cuando una estructura es simétrica y tiene número impar de luces, el eje de simetría corta a la viga central tal como se muestra en el pórtico indicado a continuación:

**Figura 45:** Estructura Simétrica con Número Impar de Luces



Nótese que debido a la simetría que presenta la estructura, las rotaciones en los extremos  $i$  y  $j$  de la viga  $i - j$ , tienen que ser iguales y de signos contrarios, es decir:

$$\theta_j = -\theta_i$$

Recordando las ecuaciones de momentos extremos del Slope deflection, para el nodo  $i$  se tiene:

$$M_{i-j} = M_{i-j}^F + \frac{4EI}{L}\theta_i + \frac{2EI}{L}\theta_j \quad \text{Ecuación 3.20}$$

Pero como  $\theta_j = -\theta_i$ , se obtiene:

$$M_{i-j} = M_{i-j}^F + \frac{4EI}{L}\theta_i + \frac{2EI}{L}(-\theta_i) \quad \text{Ecuación 3.21}$$

Factorizando el término  $\frac{4EI}{L}$  de la anterior expresión:

$$M_{i-j} = M_{i-j}^F + \frac{4EI}{L} \cdot \left[ \theta_i + \frac{1}{2}(-\theta_i) \right]$$

$$M_{i-j} = M_{i-j}^F + \frac{4EI}{L} \cdot \left[ \frac{1}{2}\theta_i \right]$$

**Ecuación 3.22**

Reemplazando el término  $\frac{4EI}{L}$  por  $K_{ij}$  en la anterior ecuación y reorganizándola, se obtiene:

$$M_{i-j} = M_{i-j}^F + \left( \frac{K_{ij}}{2} \right) \cdot \theta_i$$

**Ecuación 3.23**

Como se puede observar, el valor del factor de rigidez para la viga i-j se ha reducido a la mitad por la condición de simetría. A este factor se le llamara factor de rigidez modificado para simetría de estructuras con un número impar de luces y se representara con el símbolo  $K'$ :

$$K'_{i-j} = \frac{K_{i-j}}{2}$$

**Ecuación 3.24**

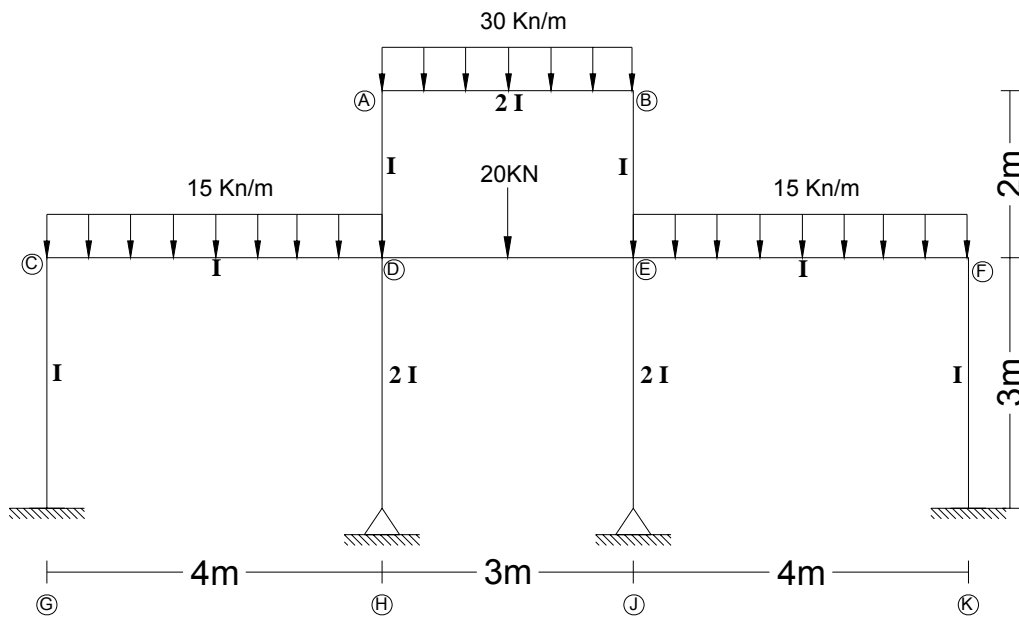
El cual al ser considerado en el análisis de este tipo de estructuras, permitirá trabajar solamente con la mitad de la estructura, simplificándose de esta manera el proceso iterativo.

**NOTA:** Es importante observar que el momento fijo o de empotramiento en los elementos cortados por el eje de simetría no cambia como consecuencia de la simplificación. Es decir: *“No hay que dividir ni la carga ni la luz del elemento cortado por el eje de simetría por dos ni por ningún factor. El momento fijo se calcula con la luz y las cargas dadas. Basta tan sólo multiplicar por ½ las rigideces de dichos elementos”*.

A continuación se presenta un ejercicio, en el cual se aplicara el concepto anteriormente explicado

### Ejemplo 3.8:

Encontrar los momentos extremos en cada uno de los elementos de la estructura.



- Momentos de empotramiento:

$$M_{AB} = -M_{BA} = \frac{30 \cdot (3)^2}{12} = 22.5 \text{ kN} - \text{m}.$$

“ Nótese que se usa

$$M_{CD} = -M_{DC} = \frac{15 \cdot (4)^2}{12} = 20 \text{ kN} - \text{m}.$$

la carga y la luz real “

$$M_{DE} = -M_{ED} = \frac{20 \cdot (3)}{8} = 7.5 \text{ kN} - \text{m}.$$

- Rigidez de las barras:

$$K_{AD} = \frac{4EI}{2} = 2EI$$

$$K_{CD} = \frac{4EI}{4} = EI$$

$$K_{CG} = \frac{4EI}{3} = 1.33 EI$$

- **Rigidez modificada**

- Apoyo extremo simplemente apoyado (  $K'_{DH} = \frac{3}{4} \cdot K_{DH}$  )

$$K'_{DH} = \frac{3}{4} \left[ \frac{4E \cdot (2I)}{3} \right] = 2 EI$$

- Simetría numero impar de luces (  $K'_{AB} = \frac{1}{2} \cdot K_{AB}$  )

$$K'_{AB} = K'_{DE} = \frac{1}{2} \left[ \frac{4E \cdot (2I)}{3} \right] = 1.33 EI$$

- **Coeficientes de distribución**

$$\mu_{AB} = \left( \frac{1.33}{1.33 + 2} \right) = 0.40$$

$$\mu_{AD} = \left( \frac{2}{1.33 + 2} \right) = 0.60$$

$$\mu_{DA} = \mu_{DH} = \left( \frac{2}{2 + 1.33 + 2 + 1} \right) = 0.315$$

$$\mu_{DE} = \left( \frac{1.33}{6.33} \right) = 0.21$$

$$\mu_{DC} = \left( \frac{1}{6.33} \right) = 0.16$$

$$\mu_{CD} = \left( \frac{1}{1.33 + 1} \right) = 0.43$$

$$\mu_{DG} = \left( \frac{1.33}{2.33} \right) = 0.57$$

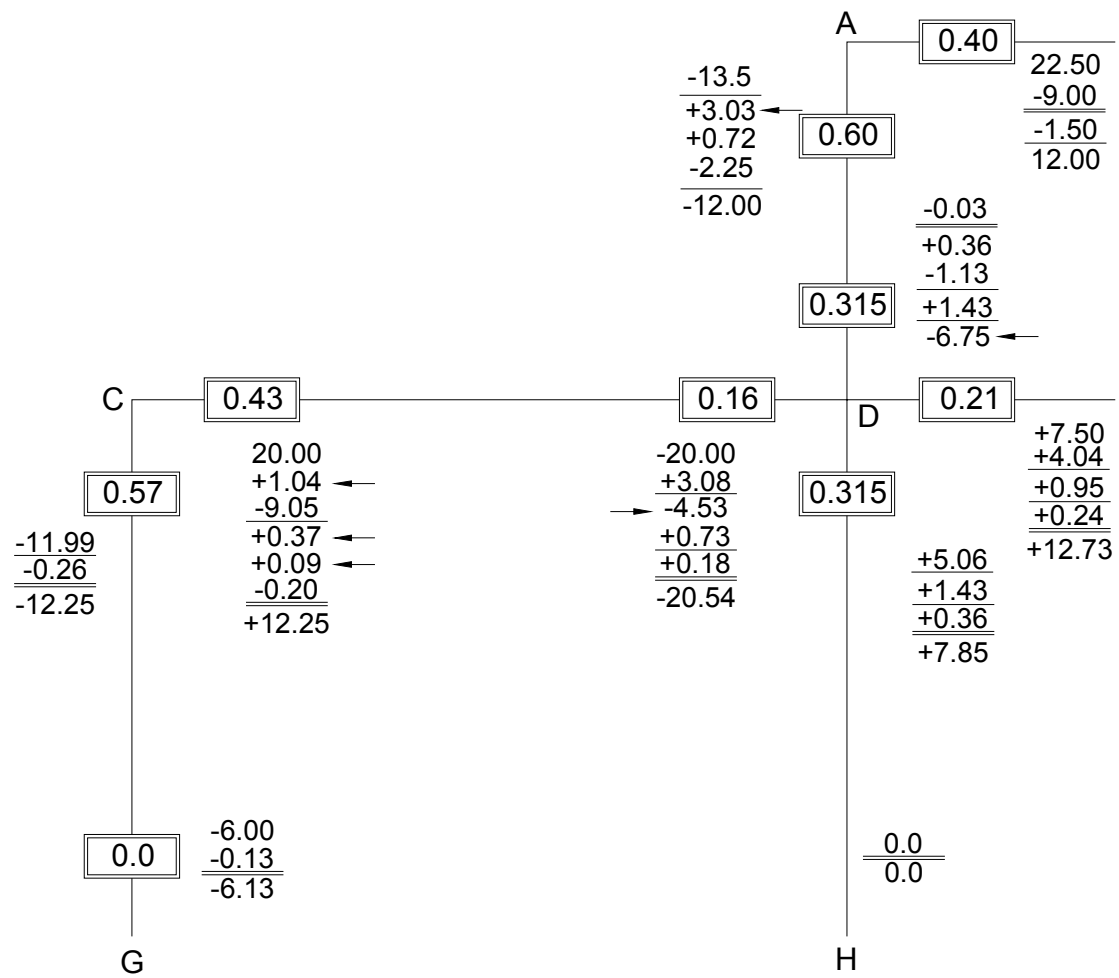


$$\mu_{GC} = 0 \quad (\text{Empotramiento})$$

- **Proceso Iterativo**

El orden en que se realizó el proceso de equilibrar los nodos fue el siguiente: A – B – C – B – A – B – C.

A continuación se muestra el esquema de cálculos:



## 4 MÉTODO DE KANI

### 4.1 CONCEPTOS PREVIOS:

#### 4.1.1 Suposiciones básicas del método

- e. Todos los miembros de la estructura son prismáticos, es decir,  $E I$  constantes.
- f. Las deformaciones de la estructura son debidas principalmente al efecto de los momentos.
- g. La estructura se comporta en el rango elástico, (obedece a la **ley de Hooke**).
- h. Las deformaciones axiales son despreciadas.

#### 4.1.2 Momentos de empotramiento

Los momentos de empotramientos se calculan del mismo modo que se explicó en el capítulo del slope Deflection.

#### 4.1.3 Nodo Rígido

Una de las características principales de un nodo rígido es que todos los extremos de los elementos que concurren a él tienen la misma rotación y el mismo desplazamiento, es decir, no hay desplazamientos ni rotaciones relativas entre los extremos de los elementos.

*“Los elementos que concurren a un Nodo rígido conservan el mismo ángulo inicial existente entre ellos, incluso después de que la estructura se ha deformado bajo la acción de las cargas externas”.*

### 4.2 CASO DE ESTRUCTURA SIN DESPLAZAMIENTO

#### 4.2.1 Ecuación para el cálculo de los momentos flectores en los extremo de una barra i-j sin desplazamiento entre nodos.

Calculando los momentos en los extremos de una barra prismática sin desplazamiento relativo entre Nodos por el método de **Slope – Deflection** se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} M_{i-j} &= M_{i-j}^F + \frac{4EI}{L}\theta_i + \frac{2EI}{L}\theta_j \\ M_{j-i} &= M_{j-i}^F + \frac{2EI}{L}\theta_i + \frac{4EI}{L}\theta_j \end{aligned} \quad \text{Ecuación 4.1}$$

En donde:

$M_{i-j}$  = Momento final en el extremo i de la barra i-j

$M_{j-i}$  = Momento final en el extremo j de la barra i-j

$M_{i-j}^F$  = Momento de empotramiento del Nodo i

$M_{j-i}^F$  = Momento de empotramiento del Nodo j

$\theta_i$  = Rotación en el extremo i de la barra

$\theta_j$  = Rotación en el extremo j de la barra

$I$  = Momento de Inercia de la barra (considerado constante)

$E$  = Modulo de elasticidad del material.

$L$  = Longitud de la barra i-j.

Factorizando el término  $\frac{2EI}{L}$  en la ecuaciones 4.1 se obtiene:

$$M_{i-j} = M_{i-j}^F + \frac{2EI}{L}(2 \cdot \theta_i + \theta_j) \quad \text{Ecuación 4.2}$$

$$M_{j-i} = M_{j-i}^F + \frac{2EI}{L}(\theta_i + 2 \cdot \theta_j) \quad \text{Ecuación 4.3}$$

El término  $(2EI/L)$  en el método de Kani se conoce como el factor de rigidez rotacional y se representa mediante el símbolo  $(K_{i-j} = 2EI/L)$ ; reemplazando este término en las ecuaciones 4.2 y 4.3 se obtiene:

$$M_{i-j} = M_{i-j}^F + 2 \cdot K_{i-j} \cdot \theta_i + K_{i-j} \cdot \theta_j \quad \text{Ecuación 4.4}$$

$$M_{j-i} = M_{j-i}^F + K_{i-j} \cdot \theta_i + 2 \cdot K_{i-j} \cdot \theta_j \quad \text{Ecuación 4.5}$$

Donde:

$M'_{i-j} = K_{i-j} \cdot \theta_i$  = Momento generado en el nodo i debido a la rotación del Nodo i  $(\theta_i)$

$M'_{j-i} = K_{i-j} \cdot \theta_j$  = Momento generado en el nodo j debido a la rotación del Nodo j  $(\theta_j)$

Reemplazando estas expresiones en la ecuación 1, se obtiene:

$$M_{i-j} = M_{i-j}^F + 2 \cdot M'_{i-j} + M'_{j-i} \quad \text{Ecuación 4.6}$$

$$M_{j-i} = M_{j-i}^F + M'_{i-j} + 2 \cdot M'_{j-i} \quad \text{Ecuación 4.7}$$

Las ecuaciones anteriores se usan en el método de Kani para calcular el valor de los momentos finales en los extremos de una barra sin desplazamiento relativo entre los nodos.

### 4.2.2 Distribución de momentos en un Nodo

Las dos ecuaciones siguientes serán utilizadas para el desarrollo del presente tema.

$$M_{i-j} = M_{i-j}^F + 2 \cdot M'_{i-j} + M'_{j-i} \quad \text{Ecuación 4.8}$$

$$M'_{i-j} = K_{i-j} \cdot \theta_i \quad \text{Ecuación 4.9}$$

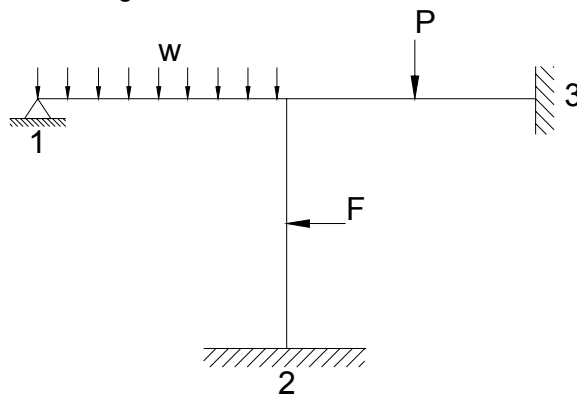
donde:

$M_{i-j}$  = Momento final en el extremo i de la barra i-j

$M'_{i-j} = K_{i-j} \cdot \theta_i$  = Momento debido a la rotación en el Nodo i ( $\theta_i$ )

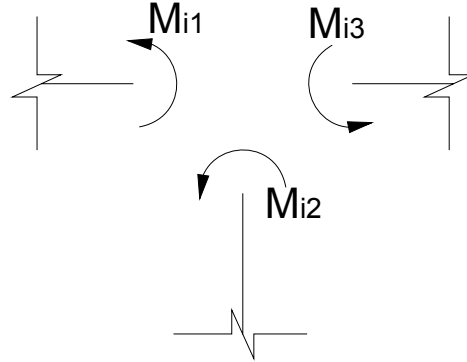
Considere la siguiente estructura sometida a la acción de las cargas mostradas.

**Figura 46:** Estructura Sometida a Cargas



Separando el Nodo rígido i de la estructura y planteando su equilibrio se encuentra que:

**Figura 47:** Análisis de la Estructura



$$\sum M_i = 0 = M_{i-1} + M_{i-2} + M_{i-3} \quad \text{Ecuación 4.10}$$

Reemplazando la **Ecuación 4.8** para el momento en i de cada una de las barras que llegan al nodo i se tiene:

$$0 = (M_{i-1}^F + 2 \cdot M'_{i-1} + M'_{1-i}) + (M_{i-2}^F + 2 \cdot M'_{i-2} + M'_{2-i}) + (M_{i-3}^F + 2 \cdot M'_{i-3} + M'_{3-i})$$

Agrupando los términos semejantes se obtiene:

$$0 = (M_{i-1}^F + M_{i-2}^F + M_{i-3}^F) + (2 \cdot M'_{i-1} + 2 \cdot M'_{i-2} + 2 \cdot M'_{i-3}) + (M'_{1-i} + M'_{2-i} + M'_{3-i})$$

La anterior ecuación escrita en forma general para cualquier número de barras que lleguen al nodo i se tiene:

$$0 = \sum M_{i-j}^F + 2 \cdot \sum M'_{i-j} + \sum M'_{j-i} \quad \text{Ecuación 4.11}$$

Despejando el término  $\sum M'_{i-j}$ , se obtiene:

$$\sum M'_{i-j} = -\frac{1}{2} \left[ \sum M^F_{i-j} + \sum M'_{j-i} \right]$$

Reemplazando la **Ecuación 4.9** en la anterior expresión se obtiene:

$$\sum (K_{i-j} \cdot \theta_i) = -\frac{1}{2} \left[ \sum M^F_{i-j} + \sum M'_{j-i} \right] \quad \text{Ecuación 4.12}$$

La rotación que sufre cada una de las barras que llegan al nodo i es la misma para todas las barras, ( $\theta_i$ ), (ver propiedades de un nodo rígido), luego:

$$\theta_i \cdot \sum K_{i-j} = -\frac{1}{2} \left[ \sum M^F_{i-j} + \sum M'_{j-i} \right] \quad \text{Ecuación 4.13}$$

$$\theta_i = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sum K_{i-j}} \left[ \sum M^F_{i-j} + \sum M'_{j-i} \right] \quad \text{Ecuación 4.14}$$

Reemplazando el valor de  $\theta_i$  en la **Ecuación 4.9**, se obtiene la siguiente expresión:

$$M'_{i-j} = K_{i-j} \cdot \left( -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sum K_{i-j}} \left[ \sum M^F_{i-j} + \sum M'_{j-i} \right] \right) \quad \text{Ecuación 4.15}$$

Ordenando la anterior ecuación se obtiene:

$$M'_{i-j} = \left( -\frac{1}{2} \cdot \frac{K_{i-j}}{\sum K_{i-j}} \right) \cdot \left[ \sum M^F_{i-j} + \sum M'_{j-i} \right] \quad \text{Ecuación 4.16}$$

Con la anterior ecuación se calcula el valor del momento que se genera en el extremo i, debido a la rotación que sufre el nodo ( $\theta_i$ ), de cada una de las barras que llegan a este nodo



Analizando la ecuación anterior se puede ver que el método de Kani presenta un factor de distribución de momentos similar al usado en el método de Cross, este factor se representa mediante el símbolo  $\mu_{i-j}$ , así:

$$\mu_{i-j} = \left( -\frac{1}{2} \cdot \frac{K_{i-j}}{\sum K_{i-j}} \right) \quad \text{Ecuación 4.17}$$

Donde:

$K_{i-j}$  = Rigidez rotacional de la barra  $i-j$ .

$\sum K_{i-j}$  = Suma de todas las rigideces de las barras  $i-j$  que llegan al Nodo  $i$ .

Así, la ecuación anterior se convierte en:

$$M'_{i-j} = \mu_{i-j} \cdot \left[ \sum M_{i-j}^F + \sum M'_{j-i} \right] \quad \text{Ecuación 4.18}$$

$M'_{i-j}$  = Momento generado en el nodo  $i$  debido a la rotación del nodo  $i$  ( $\theta_i$ )

$\mu_{i-j}$  = Factor de distribución de Kani (4.17)

$\sum M_{i-j}^F$  = Sumatoria de los momentos de empotramiento presentes en los extremos  $i$  de cada una de las barras que llegan a este nodo.

$\sum M'_{j-i}$  = Sumatoria de los momentos producidos en los extremos  $j$  de cada una de las barras que llegan al nodo  $i$  cuando ocurre una rotación en el nodo  $i$  ( $\theta_i$ ).

Esta es la ecuación básica para el desarrollo del proceso iterativo del método de Kani utilizado en estructuras sin desplazamientos relativos entre los extremos de las barras.

Si se analiza la ecuación 4.18 se puede ver que los términos  $\sum M_{i-j}^F$  y  $\mu_{i-j}$  son valores constantes y conocidos para cada nodo, lo que reduce el proceso iterativo a aplicar esta ecuación a cada uno de los elementos de la estructura, utilizando cada vez los últimos valores hallados para el término  $M'_{i-j}$ .

Factor de distribución ( $\mu_{ij}$ )

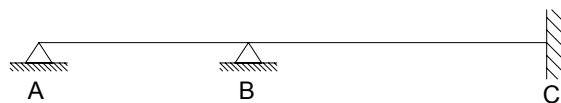
Las principales características del factor de distribución en el método de Kani son:

- El factor de distribución es independiente de la carga y sólo depende de las características de la viga tales como: el momento de *Inercia*, *El Módulo de Elasticidad* y su *Longitud* ( $I$ ,  $E$ ,  $L$ ).
- El cálculo del factor de rigidez para las barras se calcula dividiendo la rigidez de cada barra sobre la suma de las rigideces de todas las barras que llegan a ese Nodo.
- La suma de los factores de distribución de todas las barras que concurren a un Nodo es igual a ( $-\frac{1}{2}$ ). Es decir  $\sum \mu_{i-j} = -\frac{1}{2}$ .

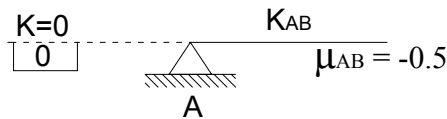
Este dato es bastante útil para comprobar las operaciones.

### 4.2.3 Propiedades de los apoyos

En el método de kani se aplican las mismas propiedades del método de Cross para el cálculo del factor de rigidez en los apoyos extremos de las estructuras.

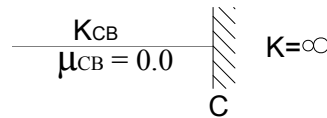


- Para el caso de un apoyo simple (extremo A) se considera que la barra se encuentra unida a otra barra de rigidez nula ( $K=0$ ), por lo que el factor de distribución es igual a  $\mu_{AB} = -\frac{1}{2}$ .



$$\mu_{AB} = -\frac{1}{2} \left( \frac{K_{AB}}{K_{AB} + 0} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{K_{AB}}{K_{AB}} \right) = -\frac{1}{2} \quad \text{Ecuación 4.19}$$

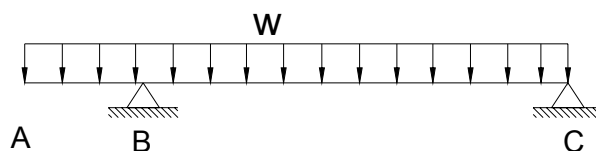
- Para el caso de un empotramiento en un extremo (extremo C) se considera que la barra se encuentra unida a otro elemento de rigidez infinita ( $K=\infty$ ), por lo que el factor de distribución es nulo  $\mu_{DC} = 0$ .



$$\mu_{CB} = -\frac{1}{2} \left( \frac{K_{CB}}{K_{CB} + \infty} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{K_{CB}}{\infty} \right) = 0 \quad \text{Ecuación 4.20}$$

- El voladizo (A-B) no contribuye a la rigidez rotacional del Nodo B, este tramo no opone resistencia para impedir la rotación del Nodo B, por lo tanto, el factor de distribución para el extremo BA es nulo  $\mu_{BA} = 0$ , mientras que para el extremo BC el factor de distribución será igual a 1,  $\mu_{BC} = 1$ . De acuerdo a lo anterior, este Nodo se puede tratar como simplemente apoyado, *sin embargo es de suma importancia transmitir al Nodo B el momento y el cortante que se generan por la carga sobre el voladizo.*

**Figura 48:** Estructura Cargada y Simplemente Apoyada



#### 4.2.4 Simplificaciones en el Método de Kani.

En el método de Kani también son aplicables las simplificaciones vistas en el capítulo de distribución de momentos o método de Cross (Capítulo 3, sección 3.8).

#### 4.2.5 Procedimiento para solucionar estructuras sin desplazamiento relativo entre nodos mediante el método de Kani

A continuación se describe el procedimiento para desarrollar estructuras sin desplazamientos relativos entre Nodos por el método de Kani:

- Calcule la rigidez  $K_{ij}$  de cada barra de la estructura.
- Calcule el factor de distribución  $\mu_{ij}$  para cada una de las barras que concurren a un Nodo.
- Considere todos los Nodos de la estructura empotrados y calcule los momentos de empotramiento en los extremos de cada una de las barras.
- Sume en cada Nodo los momentos de empotramiento (teniendo en cuenta los signos) para calcular el término  $\sum M_{i-j}^F$ .
- Calcule el valor del término  $M'_{i-j}$  para cada uno de los elementos que llegan a cada nodo con la **Ecuación 4.18**. Se recomienda empezar por el Nodo que presenta el mayor valor de  $\sum M_{i-j}^F$  para que el proceso iterativo converja mas rápido. Los resultados obtenidos de  $M'_{i-j}$  se escribirán en el diagrama y serán los  $M'_{i-j}$  para ese

ciclo. Estos valores se convertirán en  $M'_{j-i}$  al analizar los Nodos opuestos. Este proceso iterativo se mostrará mas adelante mediante un ejemplo.

- f. Recorrido todos los Nodos se acaba el primer ciclo. Nuevamente aplicamos el paso **(e)** recorriendo los Nodos en el mismo orden de la iteración inmediatamente cuantas veces sea necesario hasta alcanzar la aproximación deseada. Detenemos el proceso iterativo cuando el resultado de la ultima iteración realizada para el termino ( $M'_{i-j}$ ) sea muy cercano al resultado obtenido en la iteración inmediatamente anterior para ( $M'_{i-j}$ ).
- g. Terminado el proceso iterativo encontraremos el valor de los momentos definitivos en cada uno de los extremos de cada barra con las siguientes ecuaciones:

$$M_{i-j} = M_{i-j}^F + 2 \cdot M'_{i-j} + M'_{j-i} \quad \text{Ecuación 4.21}$$

$$M_{j-i} = M_{j-i}^F + M'_{i-j} + 2 \cdot M'_{j-i} \quad \text{Ecuación 4.22}$$

Es importante tener en cuenta los signos de cada uno de los términos.

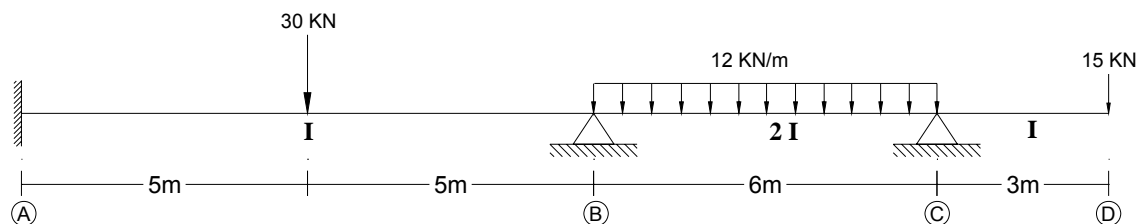
**Importante:**

- *La aproximación de los resultados obtenidos depende del número total de iteraciones que se hagan.*
- *Si el proceso de iteración de momentos se realizó en forma correcta, entonces los momentos finales deben satisfacer las ecuaciones de equilibrio de momentos en todos los Nodos de la estructura.*

- h. Conocidos los momentos resultantes en los extremos de cada barra se calculan los cortantes y las fuerzas axiales para cada una de las barras mediante las ecuaciones básicas de equilibrio ( $\sum M_i = 0, \sum F_y = 0$ ), lo que permite calcular las reacciones en los Nodos y revisar el equilibrio externo.

## 4.2.6 Ejercicios de Aplicación

### Ejemplo 4.1



Rigideces de las barras:

$$K_{AB} = \left( \frac{2(EI)_{AB}}{L_{AB}} \right) = \frac{2(EI)}{10} = \frac{EI}{5}$$

$$K_{BC} = \left( \frac{2(EI)_{BC}}{L_{BC}} \right) = \frac{2(2EI)}{6} = \frac{2EI}{3}$$

$$K_{CD} \text{ voladizo} = 0$$

Factor de distribución:

Nodo A:

$$\mu_{AB} = -\frac{1}{2} \left( \frac{K_{AB}}{K_{AB} + \infty} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{\frac{EI}{5}}{\frac{EI}{5} + \infty} \right) = 0$$

Nodo B:

$$\mu_{BA} = -\frac{1}{2} \left( \frac{K_{AB}}{K_{AB} + K_{BC}} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{\frac{EI}{5}}{\frac{EI}{5} + \frac{2EI}{3}} \right) = -0.12$$

$$\mu_{BC} = -\frac{1}{2} \left( \frac{K_{BC}}{K_{AB} + K_{BC}} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{\frac{2EI}{3}}{\frac{EI}{5} + \frac{2EI}{3}} \right) = -0.38$$

Nodo C:

$$\mu_{CB} = -\frac{1}{2} \left( \frac{K_{CB}}{K_{BC} + K_{CD \text{ vol.}}} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{\frac{2EI}{3}}{\frac{2EI}{3} + 0} \right) = -0.5$$

Momentos de empotramiento:

$$M_{AB} = -M_{BA} = \frac{PL}{8} = \frac{30(10)}{8} = 37.5 \text{ KN} - \text{m.}$$

$$M_{BC} = -M_{CB} = \frac{WL^2}{12} = \frac{12(6)^2}{12} = 36 \text{ KN} - \text{m.}$$

$$M_{CD \text{ vol.}} = 3 \cdot 15 = 45 \text{ KN} - \text{m}$$

Cálculo de  $\sum M_{ij}^F$  en cada nodo:

Nodo A:

$$\sum M_A^F = M_{AB}^F = 37.5 \text{ KN} - \text{m.}$$

Nodo B:

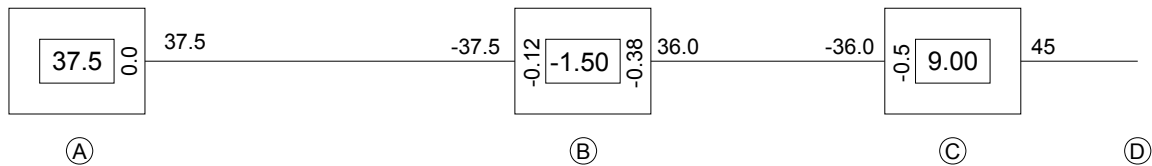
$$\sum M_B^F = M_{BA}^F + M_{BC}^F = -37.5 + 36 = -1.5 \text{ KN} - \text{m.}$$

Nodo C:

$$\sum M_C^F = M_{CB}^F + M_{CD \text{ vol.}}^F = -36 + 45 = 9 \text{ KN} - \text{m.}$$

Esquema de cálculos para el proceso iterativo:

Los valores antes obtenidos se escriben en el esquema de cálculo como se muestra a continuación:



### Proceso Iterativo

Para realizar el proceso iterativo se aplica la siguiente ecuación en cada uno de los nodos de la estructura:

$$M'_{i-j} = \mu_{ij} \left[ \sum M^F_{ij} + \sum M'_{j-i} \right]$$

Al aplicar esta ecuación en el primer nodo, el término  $\sum M'_{j-i}$  será cero, es decir solo se tendrá el valor del termino  $\sum M^F_{ij}$ .

El orden en que se realizan las iteraciones no tiene importancia. Sin embargo es de gran importancia efectuar la iteración en todos y cada uno de los nodos. Como se menciono con anterioridad se recomienda empezar con el nodo que presenta el mayor del término  $\sum M^F_{ij}$ .

En este ejercicio se opta por el siguiente orden de recorrido de nodos: C – B – A.

- Primera iteración:

Nodo C:



$$M'_{CB} = -0.5 \cdot (9) = -4.5 \text{ kN} - \text{m}.$$

Nodo B:

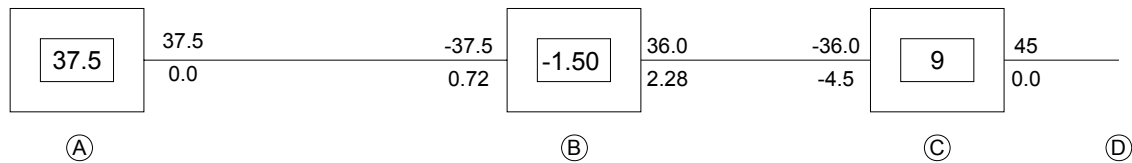
$$M'_{BA} = -0.12 (-1.5 - 4.5) = 0.72 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M'_{BC} = -0.38 (-1.5 - 4.5) = 2.28 \text{ kN} - \text{m}.$$

Nodo A:

$$M'_{AB} = 0(37.5 + 0.72) = 0 \text{ kN} - \text{m}.$$

Los valores recién calculados se colocan en el diagrama de cálculos como se muestra a continuación:



De igual manera se continuara haciendo con cada una de las iteraciones.

- Segunda iteración:

$$M'_{CB} = -0.5 (9 + 2.28) = -5.64 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M'_{BA} = -0.12 (-1.5 + 0 - 5.64) = 0.86 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M'_{BC} = -0.38 (-1.5 + 0 - 5.64) = 2.71 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M'_{AB} = 0(37.5 + 0.86) = 0 \text{ kN} - \text{m}.$$

- Tercera iteración:

$$M'_{CB} = -0.5 (9 + 2.71) = -5.86 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M'_{BA} = -0.12 (-1.5 + 0 - 5.86) = 0.88 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M'_{BC} = -0.38 (-1.5 + 0 - 5.86) = 2.80 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M'_{AB} = 0(37.5 + 0.88) = 0 \text{ kN} - \text{m}.$$

- Cuarta iteración:

$$M'_{CB} = -0.5 (9 + 2.80) = -5.90 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M'_{BA} = -0.12 (-1.5 + 5.90 - 0) = 0.89 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M'_{BC} = -0.38 (-1.5 + 5.90 - 0) = 2.81 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M'_{AB} = 0(37.5 + 0.89) = 0 \text{ kN} - \text{m}.$$

- Quinta iteración:

$$M'_{CB} = -0.5 (9 + 2.81) = -5.91 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M'_{BA} = -0.12 (-1.5 - 5.9) = 0.89 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M'_{BC} = -0.38 (-1.5 - 5.90) = 2.82 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M'_{AB} = 0(37.5 + 0.89) = 0 \text{ kN} - \text{m}.$$

- Sexta iteración:

$$M'_{CB} = -0.5 (9 + 2.82) = -5.91 \text{ kN} - \text{m}.$$

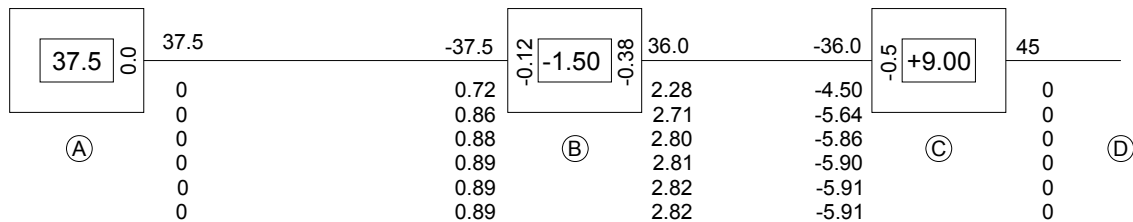
$$M'_{BA} = -0.12 (-1.5 - 5.91) = 0.89 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M'_{BC} = -0.38 (-1.5 - 5.91) = 2.82 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M'_{AB} = 0(37.5 + 0.89) = 0 \text{ kN} - \text{m}.$$

Como se puede observar, los valores de momento obtenidos en las dos últimas iteraciones son bastante parecidos, así que se da por terminado el proceso iterativo.

A continuación se muestra en el diagrama de cálculo los resultados obtenidos para cada iteración:



### Cálculo de momentos extremos finales

Una vez terminado el proceso iterativo, se calculan los momentos en los extremos de cada barra con el uso de la ecuación ( $M_{ij} = M_{ij}^F + 2M'_{ij} + M'_{ji}$ ). Recuérdese que los valores a reemplazar en la anterior ecuación, son los correspondientes a la última iteración.

$$M_{AB} = 37.5 + 2(0) + 0.89 = 38.39 \text{ kN} - \text{m.}$$

$$M_{BA} = -37.5 + 2(0.89) + 0 = -35.72 \text{ kN} - \text{m.}$$

$$M_{BC} = 36 + 2(2.82) - 5.91 = 35.73 \text{ kN} - \text{m.}$$

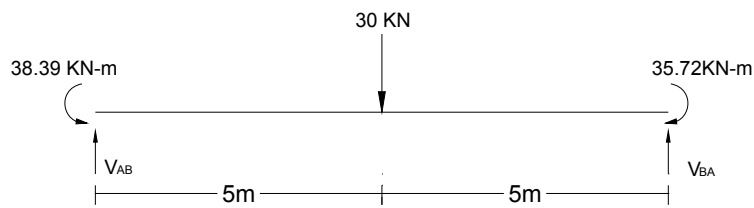
$$M_{CB} = -36 + 2(-5.91) + 2.82 = -45 \text{ kN} - \text{m.}$$

$$M_{vol.} = 45 + 2(0) + 0 = 45 \text{ kN} - \text{m.}$$

### Estática de cada barra

Una vez conocidos los momentos finales, se calcularan los cortantes de los elementos por medio de la estática:

Tramo AB:



$$\sum M_A = 0 = 38.39 - 35.72 - 30(5) + 10V_{BA}$$

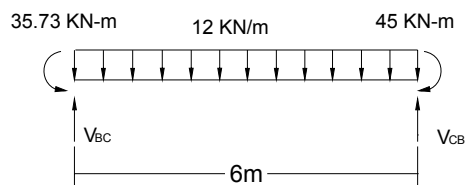
$$V_{BA} = 14.73 \text{ kN.}$$

$$\sum F_y = 0 = V_{AB} - 30 + V_{BA}$$

$$0 = V_{AB} - 30 + 14.73$$

$$V_{AB} = 15.27 \text{ kN.}$$

Tramo BC:



$$\sum M_B = 0 = 35.73 - 45 - \frac{12(6)^2}{2} + 6V_{CB}$$

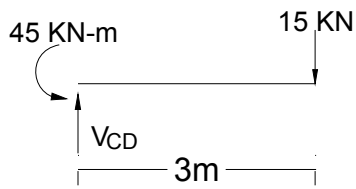
$$V_{CB} = 37.55 \text{ kN.}$$

$$\sum F_y = 0 = V_{BC} - 12(6) + V_{CB}$$

$$0 = V_{BC} - 72 + 37.55$$

$$V_{BC} = 34.45 \text{ kN.}$$

Tramo CD (voladizo):



$$\sum F_y = V_{CD} - 15 = 0$$

$$V_{CD} = 15 \text{ kN.}$$

Calculo de reacciones:

Conocidos los cortantes, se plantea equilibrio en cada nodo de la estructura para conocer el valor de las reacciones:

Equilibrio en Nodo A:

$$\sum M_{\text{nodo A}} = M_A - M_{AB} = 0$$

$$M_A = M_{AB}$$

$$M_A = 38.39 \text{ kN.}$$

$$\sum F_y = R_A - V_{AB} = 0$$

$$R_A = V_{AB} = 15.27 \text{ kN.}$$

Equilibrio en Nodo B:

$$\sum M_{\text{nodo B}} = M_{BA} - M_{BC} = 0$$

$$35.72 - 35.73 = -0.01 \cong 0$$

$$\sum F_y = 0 = R_B - V_{BA} - V_{BC}$$

$$R_B = V_{BA} + V_{BC}$$

$$R_B = 14.73 + 34.45 = 49.18 \text{ kN.}$$

Equilibrio en Nodo C:

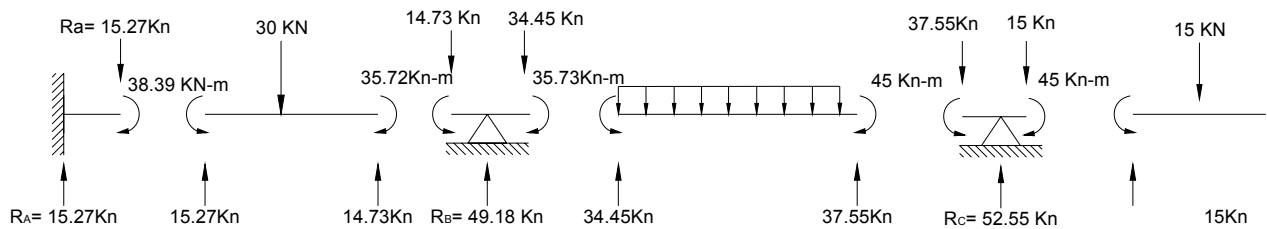
$$\sum M_{\text{nodo C}} = M_{CB} - M_{CD} = 0$$

$$45 - 45 = 0$$

$$\sum F_y = 0 = R_C - V_{CB} - V_{CD}$$

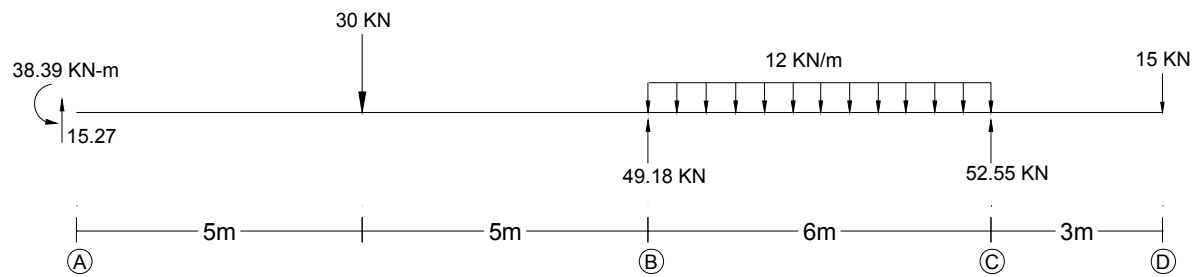
$$R_C = V_{CB} + V_{CD}$$

$$R_C = 37.55 + 15 = 52.55 \text{ kN.}$$



Equilibrio externo de la estructura:

Para comprobar que los valores obtenidos son correctos, se plantea el equilibrio general para toda la estructura:



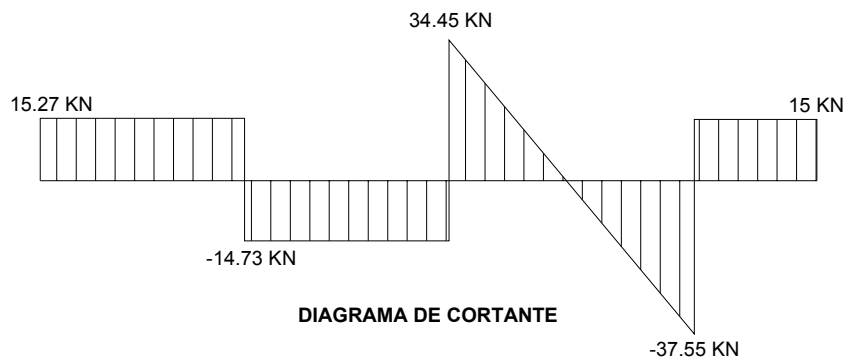
$$\sum M_A = 38.39 - 30 \cdot (5) + 10 \cdot (49.18) - (12 \cdot 6) \cdot (13) + 52.55 \cdot (16) - 15 \cdot (19) = 0$$

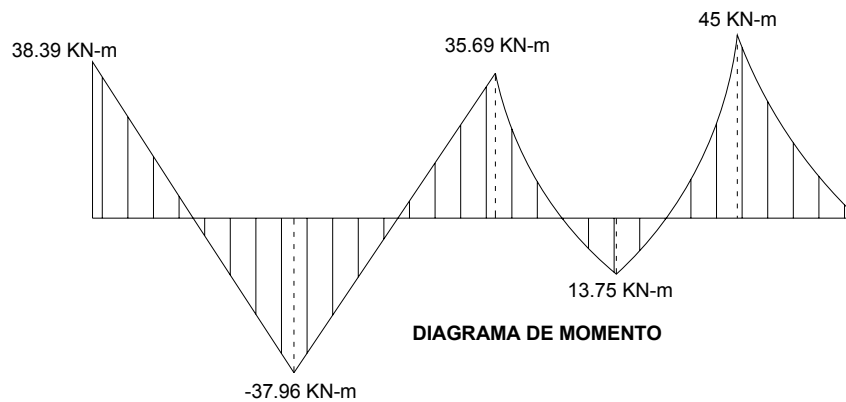
$$\sum M_A = -0.01 \cong 0$$

$$\sum F_y = 15.27 - 30 + 49.18 - 12 \cdot 6 + 52.55 - 15 = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

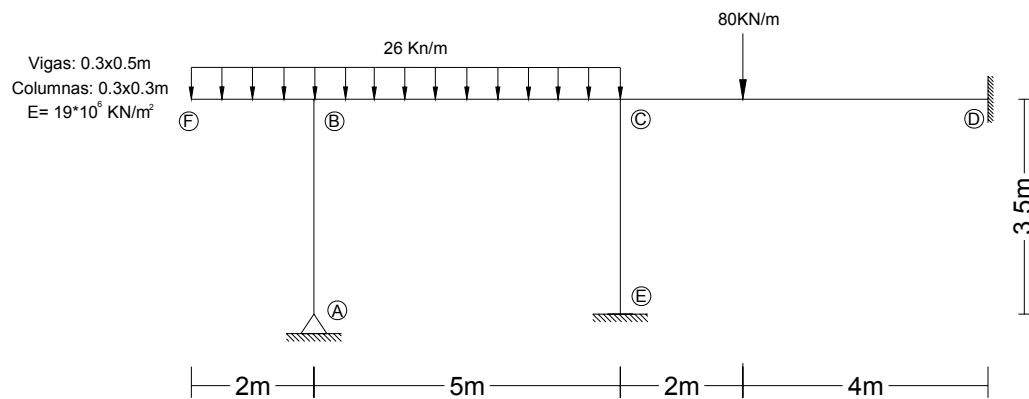
Luego el sistema se encuentra en equilibrio.





### Ejemplo 4.2

Determine los momentos extremos en cada una de las barras del siguiente pórtico haciendo uso del método de Kani:



*“El procedimiento para el desarrollo de pórticos sin desplazamiento relativos entre extremos mediante el método de Kani es exactamente el mismo usado en las vigas”.*

- Inercias de los elementos:

Vigas:



$$I = \frac{1}{2}bh^3 = \frac{1}{12}(0.3)(0.5)^3 = 3.13 \times 10^{-3} m^4$$

$$EI_{Vigas} = (19 \times 10^6)(3.13 \times 10^{-3}) = 59470 KN-m^2$$

Columnas:

$$I = \frac{1}{2}bh^3 = \frac{1}{12}(0.3)(0.3)^3 = 6.75 \times 10^{-4} m^4$$

$$EI_{Col} = (19 \times 10^6)(6.75 \times 10^{-4}) = 12825 KN-m^2$$

- Cálculo de rigidez de las barras:

$$K_{AB} = \left( \frac{2EI_{Col.}}{L_{AB}} \right) = \frac{2(12825)}{3.50} = 7328.6$$

$$K_{FB} = 0 \quad (\text{Voladizo})$$

$$K_{BC} = \left( \frac{2EI_{Vig.}}{L_{BC}} \right) = \frac{2(59470)}{5} = 23788$$

$$K_{CE} = \left( \frac{2EI_{Col.}}{L_{CE}} \right) = \frac{2(12825)}{3.50} = 7328.6$$

$$K_{CD} = \left( \frac{2EI_{Vig.}}{L_{CD}} \right) = \frac{2(59470)}{6} = 19823.3$$

- Factores de distribución:

Nodo A:

$$\mu_{AB} = -\frac{1}{2} \left( \frac{K_{AB}}{K_{AB} + 0} \right) = -0.5$$

Nodo B:

$$\mu_{BF} = -\frac{1}{2} \left( \frac{K_{BF}}{K_{BF} + K_{AB} + K_{BC}} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{0}{0 + 7328.6 + 23788} \right) = 0$$

$$\mu_{BA} = -\frac{1}{2} \left( \frac{K_{BA}}{K_{FB} + K_{AB} + K_{BC}} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{7328.6}{31116.6} \right) = -0.12$$

$$\mu_{BC} = -\frac{1}{2} \left( \frac{K_{BC}}{K_{FB} + K_{AB} + K_{BC}} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{23788}{31116.6} \right) = -0.38$$

Nodo C:

$$\mu_{CB} = -\frac{1}{2} \left( \frac{K_{CB}}{K_{CB} + K_{CE} + K_{CD}} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{23788}{23788 + 7328.6 + 19823.3} \right) = -0.23$$

$$\mu_{CE} = -\frac{1}{2} \left( \frac{K_{CE}}{K_{CB} + K_{CE} + K_{CD}} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{7328.6}{50939.9} \right) = -0.07$$

$$\mu_{CD} = -\frac{1}{2} \left( \frac{K_{CE}}{K_{CB} + K_{CE} + K_{CD}} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{19823.3}{50939.9} \right) = -0.20$$

Nodo D:

$$\mu_{DC} = 0 \quad (\text{Empotramiento})$$

Nodo E:

$$\mu_{EC} = 0 \quad (\text{Empotramiento})$$

- Momentos de empotramiento:

$$M_{BF}^F \text{ voladizo} = -\frac{W L^2}{2} = -\frac{26(2)^2}{2} = -52 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

$$M_{BC}^F = -M_{CB}^F = \frac{W L^2}{12} = -\frac{26(5)^2}{2} = 54.17 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

$$M_{CD}^F = \frac{P a b^2}{L^2} = \frac{80 (2)(4)^2}{6^2} = 71.11 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M_{DC}^F = -\frac{P a^2 b}{L^2} = -\frac{80(2)^2(4)}{6^2} = -35.55 \text{ kN} - \text{m}.$$

- Cálculo de  $\sum M_{ij}^F$  en cada nodo:

Nodo B:

$$\sum M_B^F = M_{BF}^F + M_{BC}^F = -52 + 54.17 = 2.17 \text{ kN} - \text{m}$$

Nodo C:

$$\sum M_C^F = M_{CB}^F + M_{CD}^F = -54.17 + 71.11 = 16.94 \text{ kN} - \text{m}$$

Nodo D:

$$\sum M_D^F = M_{DC}^F = -35.55 \text{ kN} - \text{m}.$$

- Proceso Iterativo

El orden de iteración escogido es:

Nodo C – Nodo A – Nodo B – Nodo D – Nodo E

- Primera iteración:

Nodo C:

$$M'_{CB} = -0.23(16.94) = -3.90$$

$$M'_{CE} = -0.07(16.94) = -1.19$$

$$M'_{CD} = -0.20(16.94) = -3.39$$

Nodo A:

$$M'_{AB} = -0.5(0) = 0$$

Nodo B:

$$M'_{BF} = 0.0(2.17 - 3.9 + 0) = 0$$

$$M'_{BA} = -0.12(-1.73) = 0.21$$

$$M'_{BC} = -0.38(-1.73) = 0.66$$

Nodo D:

$$M'_{DC} = 0(-35.55 - 3.39) = 0$$

Nodo E:

$$M'_{EC} = 0(0 - 1.19) = 0$$

- Segunda iteración:

$$M'_{CB} = -0.23(16.94 + 0.66) = -4.05$$

$$M'_{CE} = -0.07(17.6) = -1.23$$

$$M'_{CD} = -0.20(17.6) = -3.52$$

$$M'_{AB} = -0.5(0 + 0.21) = -0.11$$

$$M'_{BF} = 0(2.17 - 4.05 - 0.11) = 0$$

$$M'_{BA} = -0.12(-1.99) = 0.24$$

$$M'_{BC} = -0.38(-1.99) = 0.76$$

$$M'_{DC} = 0(-35.55 - 3.52) = 0$$

$$M'_{EC} = 0(0 - 1.23) = 0$$

- Tercera iteración:

$$M'_{CB} = -0.23(16.94 + 0.76) = -4.07$$

$$M'_{CE} = -0.07(17.7) = -1.24$$

$$M'_{CD} = -0.20(17.7) = -3.54$$

$$M'_{AB} = -0.5(0 + 0.24) = -0.12$$

$$M'_{BF} = 0(2.17 - 4.07 - 0.12) = 0$$

$$M'_{BA} = -0.12(-2.02) = 0.24$$

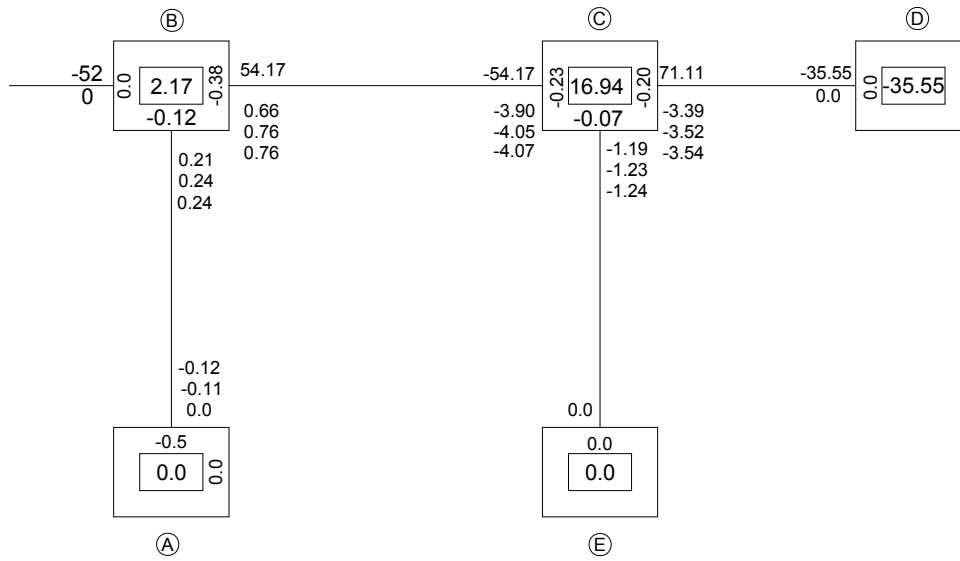
$$M'_{BC} = -0.38(-2.02) = 0.77$$

$$M'_{DC} = 0(-35.55 - 3.54) = 0$$

$$M'_{EC} = 0(0 - 1.24) = 0$$

Comparando los valores obtenidos en la última y penúltima iteración, se puede ver que varían muy poco, así que acá se detendrá el proceso iterativo.

A continuación se presenta el diagrama de cálculo de la estructura con los valores de las iteraciones.



- **Calculo de momentos extremos finales**

Recuérdese que para el cálculo de los momentos extremo se usan los últimos valores obtenidos en el proceso iterativo.

$$M_{AB} = 0 + 2(-0.12) + 0.24 = 0 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M_{BA} = 0 + 2(0.24) - 0.12 = 0.36 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M_{BF} = -52 + 2(0) = -52 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M_{BC} = 54.17 + 2(0.76) - 4.07 = 51.62 \text{ kN} - \text{m}.$$

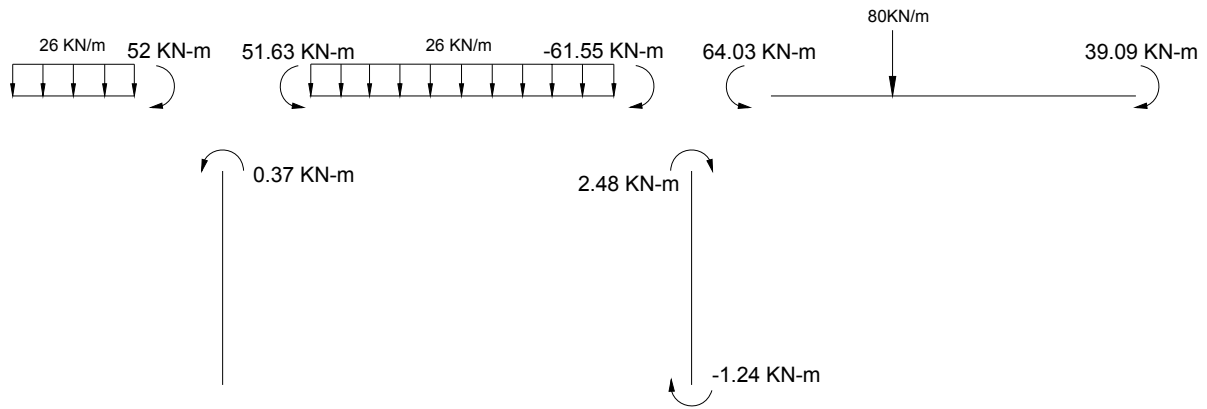
$$M_{CB} = -54.17 + 2(-4.07) - 0.76 = -61.55 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M_{CE} = 0 + 2(-1.24) + 0 = -2.48 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M_{EC} = 0 + 2(0) - 1.24 = -1.24 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M_{CD} = 71.11 + 2(-3.54) + 0 = -64.03 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M_{DC} = -35.55 + 2(0) - 3.54 = -39.09 \text{ kN} - \text{m}.$$



### Importante:

Con el método de Kani también se puede hacer uso de las simplificaciones por apoyo articulado y por simetría mencionadas en el capítulo 4 (Método de Cross).

## 4.3 PÓRTICOS DE VARIOS PISOS CON DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES EN LOS NODOS: CARGAS HORIZONTALES APLICADAS ÚNICAMENTE EN LOS NODOS.

### 4.3.1 Ecuación para el cálculo de los momentos flectores en los extremos de una barra i-j con desplazamiento entre nodos.

Si además de tener en cuenta el efecto de las cargas externas actuantes sobre una barra **i-j** y la rotación de sus Nodos (tal como se hizo en la sección anterior), se considera el desplazamiento relativo entre sus nodos, las ecuaciones para el cálculo de los momentos extremos finales de una barra i-j serán:

$$M_{i-j} = M_{i-j}^F + 2 \cdot M'_{i-j} + M'_{j-i} + M''_{i-j} \quad \text{Ecuación 4.23}$$

$$M_{j-i} = M_{j-i}^F + M'_{i-j} + 2 \cdot M'_{j-i} + M''_{j-i} \quad \text{Ecuación 4.24}$$

En las cuales aparecen dos nuevos términos:

$M''_{i-j}$  : Momento en el Nodo i debido al desplazamiento relativo  $\Delta$

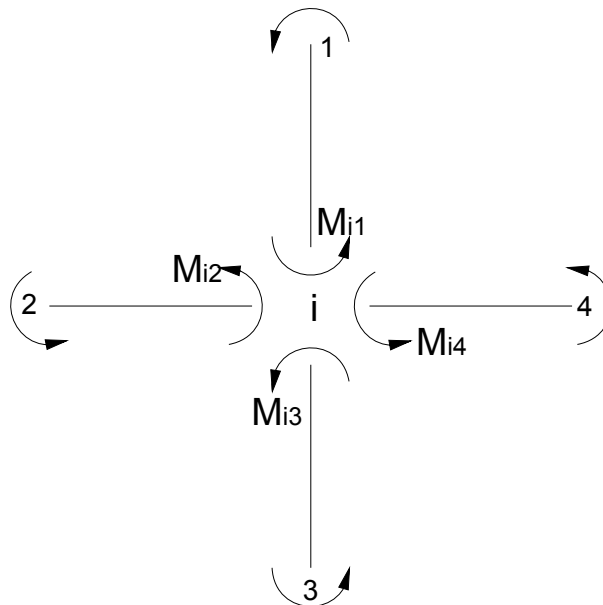
$M''_{j-i}$  : Momento en el Nodo j debido al desplazamiento relativo  $\Delta$

#### 4.3.2 Distribución de momentos en los Nodos debido a los efectos de rotación y desplazamiento relativo entre nodos:

- *Momentos debidos a la rotación:*

Planteando el equilibrio en el Nodo i de la figura se obtiene la siguiente expresión:

**Figura 49:** DCL de la Estructura



$$0 = \sum M_{i-j}^F + 2 \cdot \sum M'_{i-j} + \sum M'_{j-i} + \sum M''_{i-j} \quad \text{Ecuación 4.25}$$



Despejando el término  $\sum M'_{i-j}$ :

$$\sum M'_{i-j} = -\frac{1}{2} \left( \sum M^F_{i-j} + \sum M'_{j-i} + \sum M''_{i-j} \right) \quad \text{Ecuación 4.26}$$

Recordando la relación  $M'_{i-j} = K_{i-j} \cdot \theta_i$  y que la rotación de todas las barras que llegan al Nudo i es la misma ( $\theta_i$ ) por ser este un nodo rígido, se tiene:

$$M'_{i-j} = \left( -\frac{1}{2} \cdot \frac{K_{i-j}}{\sum K_{i-j}} \right) \cdot \left[ \sum M^F_{i-j} + \sum M'_{j-i} + \sum M''_{i-j} \right] \quad \text{Ecuación 4.27}$$

Como se puede observar, el factor de distribución de momentos es exactamente igual al calculado para estructuras sin desplazamiento.

$$\mu_{i-j} = \left( -\frac{1}{2} \cdot \frac{K_{i-j}}{\sum K_{i-j}} \right) \quad \text{Ecuación 4.28}$$

Donde:

$K_{i-j}$  = Rigidez rotacional de la barra  $i-j$  que llega al nodo i.

$\sum K_{i-j}$  = Suma de todas las rigideces de las barras  $i-j$  que llegan al Nudo i.

Luego:

$$M'_{i-j} = \mu_{i-j} \cdot \left[ \sum M^F_{i-j} + \sum M'_{j-i} + \sum M''_{i-j} \right] \quad \text{Ecuación 4.29}$$

Esta ecuación permite calcular el valor del momento  $M'_{i-j}$  en cada una de las barras de un nudo considerando los efectos de los momentos de empotramiento ( $\sum M^F_{i-j}$ ), los momentos de los extremos opuestos de las barras que llegan al Nudo ( $\sum M'_{j-i}$ ) y el momento generado por el desplazamiento horizontal de los extremos de las columnas del piso ( $\sum M''_{i-j}$ ).

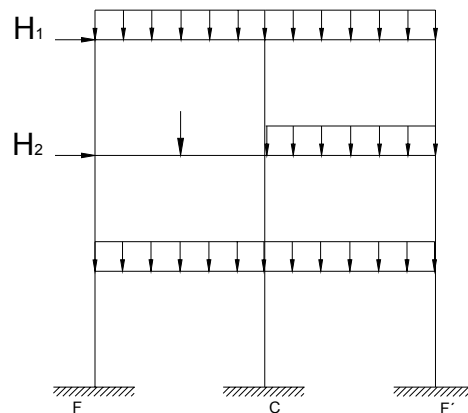
Como se sabe, los términos  $\mu_{i-j}$  y  $\sum M^F_{i-j}$  son conocidos. El término  $\sum M'_{j-i}$  se calcula de la misma forma como se mencionó en la sección de estructuras sin desplazamientos, pero el término  $\sum M''_{i-j}$  es desconocido.

En la siguiente sección se muestra el proceso para calcular este término.

- *Momento generado por el desplazamiento horizontal del piso*

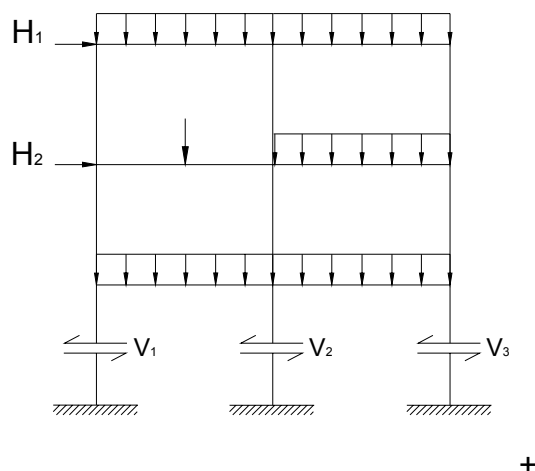
Supóngase un pórtico como el que se muestra a continuación:

**Figura 50:** Pórtico con carga Horizontal



Si se hace un corte horizontal de todas las columnas de un piso cualquiera, aparecen fuerzas cortantes y flexionantes en cada uno de los elementos verticales del piso, tales que equilibren el pórtico.

**Figura 51:** Pórtico con fuerzas Cortantes



Del anterior grafico se obtiene la siguiente ecuación de equilibrio de fuerzas en X para cualquier piso:

$$\sum H_i = \sum V_{i-j}$$

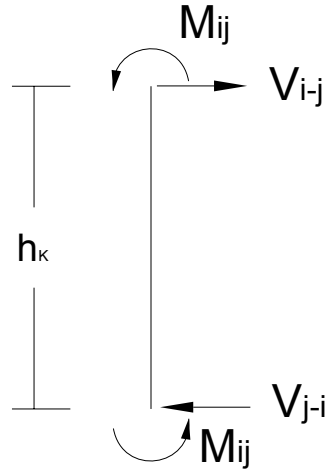
Donde:

$\sum H_i$  = Sumatoria de las fuerzas horizontales aplicadas en los Nodos del pórtico por encima del piso analizado.

$\sum V_{i-j}$  = Fuerzas cortantes en las columnas del piso analizado.

Separando las columnas de un piso cualquiera del pórtico se observa que la fuerza cortante en cada columna es igual a la sumatoria de los momentos extremos de la columna dividido entre la altura de la misma como se demuestra a continuación:

**Figura 52:** Diagrama de Cuerpo Libre de una Columna



Haciendo sumatoria de momentos con respecto a un extremo para cualquier columna se obtiene:

$$\sum M_j = 0 = M_{i-j} + M_{j-i} - h_K \cdot (V_{i-j}) \quad \text{Ecuación 4.30}$$

Despejando  $V_{i-j}$ :

$$V_{i-j} = \frac{(M_{i-j} + M_{j-i})}{h_K}$$

Con lo cual queda demostrado.

Reemplazando la anterior expresión en la ecuación (1) se obtiene:

$$\sum H_i = \sum V_{i-j} = \sum \left[ \frac{(M_{i-j} + M_{j-i})}{h_K} \right] \quad \text{Ecuación 4.31}$$

Ahora, considerando que todas las columnas del piso tienen la misma altura  $h_r$ , se tiene:

$$\left(\sum H_i\right) \cdot h_r = \sum \left(M_{i-j} + M_{j-i}\right) \quad \text{Ecuación 4.32}$$

Reemplazando, (en el término de la derecha), las ecuaciones de momentos finales en los extremos de las columnas, se obtiene:

$$\left(\sum H_i\right) \cdot h_r = \sum \left[ \left(M_{i-j}^F + 2 \cdot M'_{i-j} + M'_{j-i} + M''_{i-j}\right) + \left(M_{j-i}^F + M'_{i-j} + 2 \cdot M'_{j-i} + M''_{j-i}\right) \right]$$

#### Ecuación 4.33

Reagrupando términos semejantes se obtiene:

$$\left(\sum H_i\right) \cdot h_r = \sum \left[ \left(M_{i-j}^F + M_{j-i}^F\right) + 3 \cdot \left(M'_{i-j} + M'_{j-i}\right) + \left(M''_{i-j} + M''_{j-i}\right) \right]$$

Teniendo en cuenta que el momento  $M''_{i-j}$  y  $M''_{j-i}$  son iguales para las barras prismáticas la ecuación anterior queda convertida en:

$$\left(\sum H_i\right) \cdot h_r = \sum \left[ \left(M_{i-j}^F + M_{j-i}^F\right) + 3 \cdot \left(M'_{i-j} + M'_{j-i}\right) + 2 \cdot M''_{i-j} \right]$$

$$\left(\sum H_i\right) \cdot h_r = \sum \left(M_{i-j}^F + M_{j-i}^F\right) + \sum 3 \cdot \left(M'_{i-j} + M'_{j-i}\right) + \sum 2 \cdot M''_{i-j} \quad \text{Ecuación 4.34}$$

Despejando el término  $M''_{i-j}$ :

$$\sum M''_{i-j} = -\frac{3}{2} \left[ \frac{\sum (M^F_{i-j} + M^F_{j-i})}{3} - \frac{(\sum H_i) \cdot h_r}{3} + \sum (M'_{i-j} + M'_{j-i}) \right] \quad \text{Ecuación 4.35}$$

Este análisis se ha hecho sólo para cargas horizontales actuando a nivel de la placa, por lo tanto no hay momentos fijos en los extremos de las columnas. Así pues, la expresión del primer paréntesis se hace igual a cero.

Bajo esta consideración, la ecuación anterior se reduce a:

$$\sum M''_{i-j} = -\frac{3}{2} \left[ -\frac{(\sum H_i) \cdot h_r}{3} + \sum (M'_{i-j} + M'_{j-i}) \right] \quad \text{Ecuación 4.36}$$

Como se vio en capítulos anteriores, el valor del momento que se genera en los extremos empotrados de una barra prismática al sufrir un desplazamiento relativo entre nodos se calcula mediante la expresión:

$$M''_{i-j} = \frac{6 \cdot EI}{L^2} \cdot \Delta \quad \text{Ecuación 4.37}$$

Aplicando el concepto de rigidez rotacional para el método de Kani ( $K_{i-j} = \frac{2EI}{L}$ ) en la anterior expresión, se tiene que:

$$M''_{i-j} = \left( 3 \cdot \frac{\Delta}{h_r} \right) \cdot K_{i-j} \quad L = h_r \text{ (Altura de las columnas).} \quad \text{Ecuación 4.38}$$

Sustituyendo este término en la **ecuación 4.36**, se obtiene:

$$\sum \left[ \left( 3 \cdot \frac{\Delta}{h_r} \right) \cdot K_{i-j} \right] = -\frac{3}{2} \left[ -\frac{(\sum H_i) \cdot h_r}{3} + \sum (M'_{i-j} + M'_{j-i}) \right] \quad \text{Ecuación 4.39}$$

Considerando que todas las columnas del piso tienen las mismas condiciones de apoyo, la misma altura y despreciando las deformaciones axiales de las columnas se puede decir que el desplazamiento relativo que sufre cada una de las columnas de un piso es el mismo.

Bajo estas condiciones se tiene que:

$$\left(3 \cdot \frac{\Delta}{h_r}\right) \cdot \sum (K_{i-j}) = -\frac{3}{2} \left[ -\frac{(\sum H_i) \cdot h_r}{3} + \sum (M'_{i-j} + M'_{j-i}) \right] \quad \text{Ecuación 4.40}$$

$$\left(3 \cdot \frac{\Delta}{h_r}\right) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sum K_{i-j}} \left[ -\frac{(\sum H_i) \cdot h_r}{3} + \sum (M'_{i-j} + M'_{j-i}) \right] \quad \text{Ecuación 4.41}$$

Si se reemplaza la anterior expresión en la ecuación  $M''_{i-j} = \left(3 \cdot \frac{\Delta}{h_r}\right) \cdot K_{i-j}$ , se encuentra que:

$$M''_{i-j} = \left( -\frac{3}{2} \cdot \frac{K_{i-j}}{\sum K_{i-j}} \right) \cdot \left[ -\frac{(\sum H_i) \cdot h_r}{3} + \sum (M'_{i-j} + M'_{j-i}) \right] \quad \text{Ecuación 4.42}$$

Siendo esta la ecuación básica para el cálculo de los momentos, (debido al desplazamiento relativo entre pisos), en los extremos de cada una de las columnas de un piso

Definiendo:

$$M_p = -\frac{(\sum H_i) \cdot h_r}{3} \quad \text{Ecuación 4.45}$$

$$\omega_{i-j} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{K_{i-j}}{\sum K_{i-j}} \quad \text{Ecuación 4.46}$$

Se obtiene:

$$M''_{i-j} = \omega_{i-j} \cdot \left[ M_p + \sum_{Col} (M'_{i-j} + M'_{j-i}) \right] \quad \text{Ecuación 4.47}$$

Donde

$M_p$  = Momento de piso para el método de Kani.

$\omega_{i-j}$  = Factor de desplazamiento para cada una de las columnas de un piso.

$\sum_{Col} (M'_{i-j} + M'_{j-i})$  = Sumatoria de los momentos extremos debidos a la rotación de los nodos de cada una de las columnas del piso analizado.

En el caso en que no hay cargas horizontales aplicadas en los Nodos del pórtico, el término  $M_p$  se hace cero (0) y la ecuación 4.47 queda convertida en:

$$M''_{i-j} = \omega_{i-j} \cdot \left[ \sum (M'_{i-j} + M'_{j-i}) \right] \quad \text{Ecuación 4.48}$$

Resumiendo las dos ecuaciones básicas para solucionar pórticos con desplazamientos horizontales mediante el método de Kani:



$$M'_{i-j} = \mu_{i-j} \cdot \left[ \sum M_{i-j}^F + \sum M'_{j-i} + M''_{i-j} \right]$$

**Ecuación 4.49**

$$M''_{i-j} = \omega_{i-j} \cdot \left[ M_p + \sum_{Col} (M'_{i-j} + M'_{j-i}) \right]$$

**Ecuación 4.50**

### **Importante:**

Si la estructura tiene apoyos articulados en la base o es una combinación de apoyos articulados y empotrados, las ecuaciones anteriores no son aplicables para las columnas del primer piso ya que éstas fueron deducidas considerando que todos los apoyos eran empotrados.

Las formulas para resolver este tipo de estructuras puede ser estudiada o revisada en los libros citados como referencias bibliografías al final del presente capítulo.

### **4.3.3 Procedimiento de análisis para pórticos con desplazamiento horizontal por el método de Kani**

A continuación se describe el procedimiento para desarrollar estructuras con desplazamientos horizontales por medio del método de Kani,

- a.** Calcular la rigidez  $K_{ij}$  de cada barra de la estructura.
- b.** Calcular el factor de distribución  $\mu_{ij}$  para cada una de las barras que concurren a un Nodo.
- c.** Calcular el factor de distribución por desplazamiento  $\omega_{i-j}$  para las columnas de cada piso.

- d.** Asumir que todos los Nodos de la estructura son empotrados y se calcular los momentos de empotramiento en los extremos de cada una de las barras.
- e.** Sumar en cada Nodo los momentos de empotramiento (teniendo en cuenta los signos) para calcular el término  $\sum M_{i-j}^F$ .
- f.** Calcular el valor del momento de piso  $M_p$  para cada uno de los niveles de la estructura si existen fuerzas horizontales en la estructura.
- g.** Antes de empezar a realizar el proceso iterativo en la estructura es importante escoger el orden de recorrido de los Nodos. Este orden se sigue en todos los ciclos del proceso de iteración. Para acelerar la convergencia del método se recomienda empezar por el Nodo en el cual el término  $\sum M_{i-j}^F$  es mayor.
- h.** Calcular los momentos  $M'_{i-j}$  para cada uno de los elementos que llegan a cada Nodo usando la ecuación:  $M'_{i-j} = \mu_{i-j} \cdot \left[ \sum M_{i-j}^F + \sum M'_{j-i} + M''_{i-j} \right]$   
Los resultados obtenidos se escriben en el diagrama de la estructura. En el primer ciclo de este paso, el término  $M'_{j-i}$  es cero para el primer Nodo y los  $M''_{i-j}$  son iguales a 0 para todos los elementos.
- i.** Recorrido todos los Nodos de la estructura se procede a calcular los momentos de desplazamiento  $M''_{i-j}$  de todas las columnas usando las ecuaciones 4.47 y 4.48, según el caso. Esto se hace piso por piso. Al finalizar este proceso se ha cerrado el primer ciclo de iteración.
- j.** Repetir los pasos **h** y **i** teniendo en cuenta el orden de recorrido de los Nodos hasta cuando los valores calculados tanto para los momentos de giro como para los de desplazamiento sean aproximadamente iguales a los del ciclo anterior.
- k.** Terminado el proceso iterativo se calcula el valor de los momentos reales en los extremos de cada una de las barras aplicando las siguientes ecuaciones:

$$M_{i-j} = M_{i-j}^F + 2 \cdot M'_{i-j} + M'_{j-i} + M''_{i-j}$$

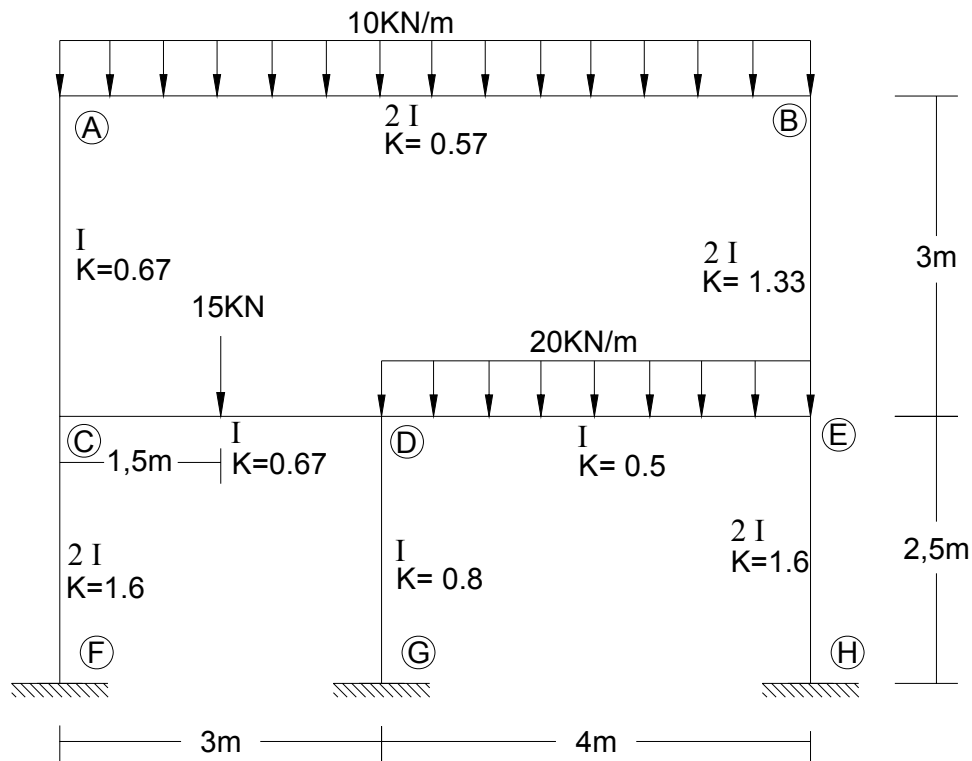
$$M_{j-i} = M_{j-i}^F + M'_{i-j} + 2 \cdot M'_{j-i} + M''_{j-i}$$

Es de gran importancia tener en cuenta los signos de cada uno de los momentos.

- l.* Conocidos los momentos resultantes en los extremos de cada elemento, se calculan los cortantes y las fuerzas axiales, (en caso de existir), para cada uno de los elementos mediante las ecuaciones básicas de equilibrio ( $\sum M_i = 0, \sum F_y = 0$ ).
- m.* Calcular las reacciones en los Nodos revisar el equilibrio externo.

### Ejemplo 4.3

Calcular los momentos en los extremos de cada uno de los elementos que conforman el pórtico.



- a. Cálculo de la rigidez de cada barra ( $K_{ij}$ ):

$$K_{AB} = \frac{2E(2I)}{7} = \frac{4}{7}EI = 0.57 \cdot EI$$

$$K_{AC} = \frac{2EI}{3} = \frac{2}{3}EI = 0.67 \cdot EI$$

$$K_{BE} = \frac{2E(2I)}{3} = \frac{4}{3}EI = 1.33 \cdot EI$$

$$K_{CF} = \frac{2E(2I)}{2.5} = \frac{8}{5}EI = 1.6 \cdot EI$$

$$K_{DG} = \frac{2EI}{2.5} = \frac{4}{5}EI = 0.8 \cdot EI$$

$$K_{EH} = \frac{2E(2I)}{2.5} = \frac{8}{5}EI = 1.6 \cdot EI$$

$$K_{CD} = \frac{2EI}{3} = \frac{2}{3}EI = 0.67 \cdot EI$$

$$K_{DE} = \frac{2EI}{4} = \frac{1}{2}EI = 0.50 \cdot EI$$

b. Factor de distribución por giro ( $\mu_{ij}$ ):

Nodo A:

$$\mu_{AB} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\frac{4}{7}EI}{\frac{4}{7}EI + \frac{2}{3}EI} \right) = -0.23$$

$$\mu_{AC} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\frac{2}{3}EI}{\frac{26}{21}EI} \right) = -0.27$$

Nodo B:

$$\mu_{B A} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\frac{4}{7} EI}{\frac{4}{7} EI + \frac{4}{3} EI} \right) = -0.15$$

$$\mu_{B E} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\frac{4}{7} EI}{\frac{40}{21} EI} \right) = -0.35$$

Nodo C:

$$\mu_{C A} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\frac{2}{3} EI}{\frac{2}{3} EI + \frac{2}{3} EI + \frac{8}{5} EI} \right) = -0.11$$

$$\mu_{C D} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\frac{2}{3} EI}{\frac{44}{15} EI} \right) = -0.11$$

$$\mu_{C F} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\frac{8}{5} EI}{\frac{44}{15} EI} \right) = -0.28$$

Nodo D:

$$\mu_{D C} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\frac{2}{3} EI}{\frac{2}{3} EI + \frac{4}{5} EI + \frac{1}{2} EI} \right) = -0.17$$

$$\mu_{D G} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\frac{4}{5} EI}{\frac{59}{30} EI} \right) = -0.20$$

$$\mu_{D E} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\frac{1}{2} EI}{\frac{59}{30} EI} \right) = -0.13$$

Nodo E:

$$\mu_{E D} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\frac{1}{2} EI}{\frac{1}{2} EI + \frac{4}{3} EI + \frac{8}{5} EI} \right) = -0.08$$

$$\mu_{E B} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\frac{4}{3} EI}{\frac{103}{30} EI} \right) = -0.19$$

$$\mu_{E A} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\frac{8}{5} EI}{\frac{103}{30} EI} \right) = -0.23$$

Nodos F, G, H:

$$\mu_{G D} = \mu_{H E} = \mu_{N F} = 0 \quad (\text{Condición de empotramiento})$$

c. Factor de distribución por desplazamiento de piso ( $\omega_{ij}$ ):

Piso 2:

$$\omega_{A C} = -\frac{3}{2} \left( \frac{\frac{2}{3} EI}{\frac{2}{3} EI + \frac{4}{3} EI} \right) = -0.5$$

$$\omega_{B E} = -\frac{3}{2} \left( \frac{\frac{4}{3} EI}{\frac{6}{3} EI} \right) = -1.0$$

Piso 1:

$$\omega_{C F} = -\frac{3}{2} \left( \frac{\frac{8}{5} EI}{\frac{8}{5} EI + \frac{4}{5} EI + \frac{8}{5} EI} \right) = -0.6$$

$$\omega_{D G} = -\frac{3}{2} \left( \frac{\frac{4}{5} EI}{\frac{5}{4} EI} \right) = -0.3$$

$$\omega_{E H} = -\frac{3}{2} \left( \frac{\frac{8}{5} EI}{\frac{5}{4} EI} \right) = -0.6$$

d. Momentos de empotramiento:

$$M_{AB}^F = -M_{BA}^F = \frac{10 \times 7^2}{12} = 40.83 \text{ KN} - \text{m}$$

$$M_{CD}^F = -M_{DC}^F = \frac{15 \times 3}{8} = 5.63 \text{ KN} - \text{m}$$

$$M_{DE}^F = -M_{ED}^F = \frac{20 \times 4^2}{12} = 26.67 \text{ KN} - \text{m}$$

e. Cálculo de  $\sum M_{ij}^F$  en cada nodo:

Nodo A:

$$\sum M_A^F = M_{AB}^F = 40.83 \text{ KN} - \text{m}.$$

Nodo B:

$$\sum M_B^F = M_{BA}^F = -40.83 \text{ KN} - \text{m}.$$

Nodo C:

$$\sum M_C^F = M_{CD}^F = 5.63 \text{ KN} - \text{m}.$$

Nodo D:

$$\sum M_D^F = M_{DC}^F + M_{DE}^F = -5.63 + 26.67 = 21.04 \text{ kN} - \text{m}$$

Nodo E:

$$\sum M_E^F = M_{ED}^F = -26.67 \text{ KN} - \text{m}.$$

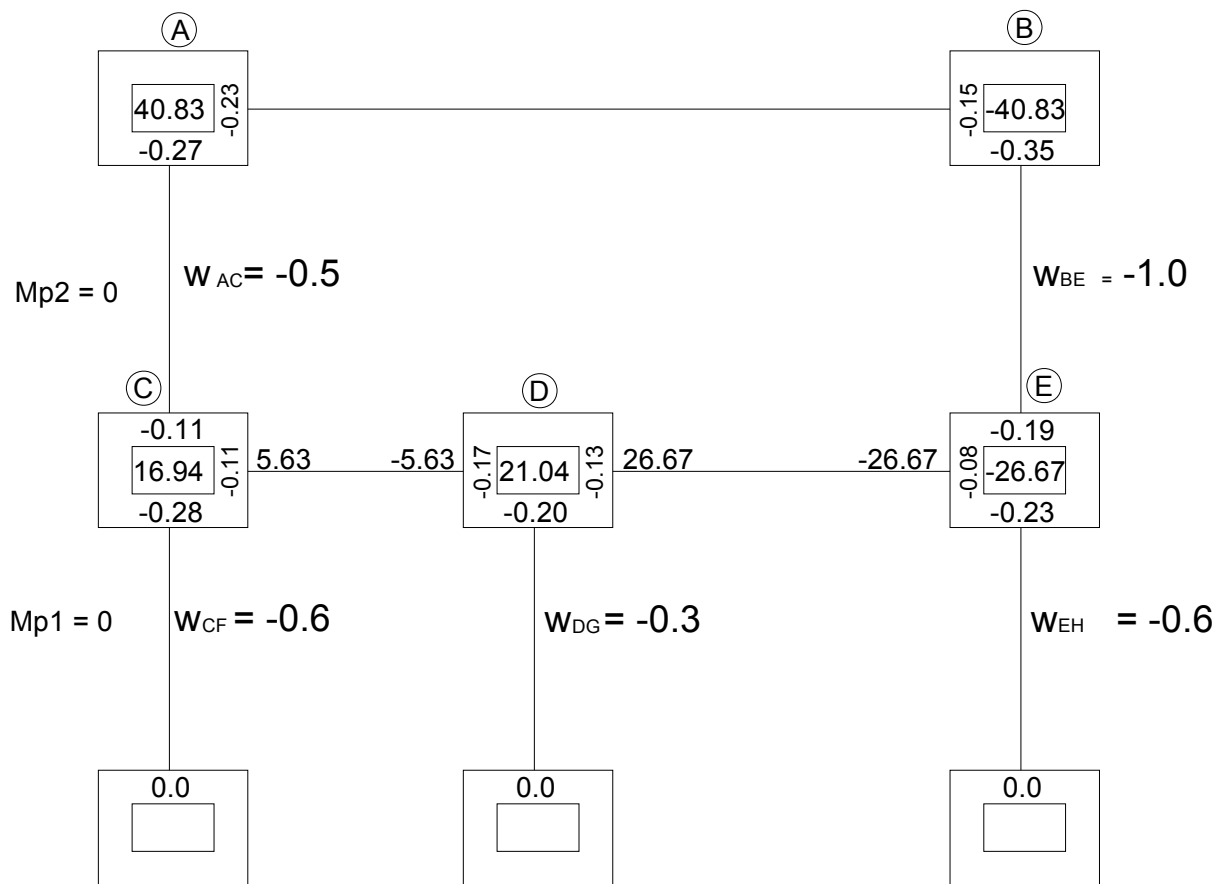
f. Momentos de entrepiso ( $M_p$ ):

En este ejemplo, los momentos de entrepiso son iguales a cero debido a que no hay cargas horizontales aplicadas sobre el pórtico.

g. Esquema de cálculos para el proceso iterativo:

Los valores obtenidos se colocan en el esquema de cálculo como se muestra a continuación:





#### h. Proceso Iterativo:

El proceso iterativo para el pórtico se realiza empleando primero las ecuaciones de giro y luego las de desplazamiento de piso. El orden ha seguir en el proceso iterativo por giro es: A – C – B – E – D y para las iteraciones por desplazamiento son Piso 2 – Piso1.

- Primer Ciclo:

- Iteración de giro:

La iteración por giro se realiza usando la siguiente ecuación:

$$M'_{i-j} = \mu_{i-j} \cdot \left[ \sum M^F_{i-j} + \sum M'_{j-i} + M''_{i-j} \right]$$

Es importante recordar que para la primera iteración por giro, el último termino de la ecuación es cero (0).

A continuación se muestra la primera iteración:

$$M'_{AB} = -0.23(40.83) = -9.39$$

$$M'_{AC} = -0.27(40.83) = -11.03$$

$$M'_{CA} = -0.11(5.63 - 11.03) = 0.59$$

$$M'_{CD} = -0.11(-5.4) = 0.59$$

$$M'_{CF} = -0.28(-5.4) = 1.51$$

$$M'_{BA} = -0.15(-40.83 - 9.39) = 7.53$$

$$M'_{BE} = -0.35(-50.22) = 17.58$$

$$M'_{EB} = -0.19(-26.67 + 17.58) = 1.73$$

$$M'_{ED} = -0.08(-9.09) = 0.73$$

$$M'_{EH} = -0.23(-9.09) = 2.09$$

$$M'_{DE} = -0.13(21.04 + 0.59 + 0.73) = -2.91$$

$$M'_{DG} = -0.20(22.36) = -4.47$$

$$M'_{DC} = -0.17(22.36) = -3.80$$

- Iteración por desplazamiento de piso:

La iteración por desplazamiento de piso se realiza usando la siguiente ecuación:

$$M''_{i-j} = \omega_{i-j} \cdot \left[ \sum_{Col} (M'_{i-j} + M'_{j-i}) \right]$$

Recuerde que el termino ***M<sub>p</sub>*** es cero para este ejercicio.

Piso 2:

$$M''_{AC} = -0.5(-11.03 + 0.59 + 17.58 + 1.73) = -4.44$$

$$M''_{BE} = -1.0(8.87) = -8.87$$

Piso 1:

$$M''_{CF} = -0.6(1.51 - 4.47 + 2.09) = 0.52$$

$$M''_{DG} = -0.3(-0.87) = 0.26$$

$$M''_{EH} = -0.6(-0.87) = 0.52$$

Observación:

Los valores calculados de  $M''_{i-j}$  por el desplazamiento del piso se anotan a la derecha y en la mitad de cada una de las columnas del pórtico en el esquema de cálculos.

- Segundo Ciclo:

- Iteración de giro:

$$M'_{AB} = -0.23(40.83 + 7.53 + 0.59 - 4.44) = -10.24$$

$$M'_{AC} = -0.27(44.51) = -12.02$$

$$M'_{CA} = -0.11(5.63 - 12.02 - 3.80 - 4.44 + 0.52) = 1.57$$

$$M'_{CD} = -0.11(-14.29) = 1.57$$

$$M'_{CF} = -0.28(14.29) = 4.00$$

$$M'_{BA} = -0.15(-40.83 - 10.24 + 1.73 - 8.87) = 8.73$$

$$M'_{BE} = -0.35(-58.21) = 20.37$$

$$M'_{EB} = -0.19(-26.67 + 20.37 - 2.91 - 8.87 + 0.52) = 3.34$$

$$M'_{ED} = -0.08(-17.56) = 1.41$$

$$M'_{EH} = -0.23(-17.56) = 4.04$$

$$M'_{DE} = -0.13(21.04 + 1.41 + 1.57 + 0.26) = -3.16$$

$$M'_{DG} = -0.20(24.28) = -4.86$$

$$M'_{DC} = -0.17(24.28) = -4.13$$

- Iteración por desplazamiento de piso:

Piso 2:

$$M''_{AC} = -0.5(-12.02 + 1.57 + 20.37 + 3.34) = -6.63$$

$$M''_{BE} = -1.0(13.26) = -13.26$$

Piso 1:

$$M''_{CF} = -0.6(4.0 - 4.86 + 4.04) = -1.91$$

$$M''_{DG} = -0.3(3.18) = -0.95$$

$$M''_{EH} = -0.6(3.18) = -1.91$$

• Tercer Ciclo:

- Iteración de giro:

$$M'_{AB} = -0.23(40.83 + 8.73 + 1.57 - 6.63) = -10.24$$

$$M'_{AC} = -0.27(44.5) = -12.02$$

$$M'_{CA} = -0.11(5.63 - 12.02 - 4.13 - 6.63 + 1.91) = 2.12$$

$$M'_{CD} = -0.11(-19.24) = 2.12$$

$$M'_{CF} = -0.28(-19.24) = 5.39$$

$$M'_{BA} = -0.15(-40.83 - 10.24 + 3.34 - 13.26) = 9.15$$

$$M'_{BE} = -0.35(-60.99) = 21.35$$

$$M'_{EB} = -0.19(-26.67 + 21.35 - 3.16 - 13.26 + 1.91) = 4.49$$

$$M'_{ED} = -0.08(-23.65) = 1.89$$

$$M'_{EH} = -0.23(-23.65) = 5.44$$

$$M'_{DE} = -0.13(21.04 + 1.89 + 2.12 + 0.95) = -3.13$$

$$M'_{DG} = -0.20(24.1) = -4.82$$

$$M'_{DC} = -0.17(24.1) = -4.10$$

- Iteración por desplazamiento de piso:

Piso 2:

$$M''_{AC} = -0.5(-12.02 + 2.12 + 21.35 + 4.49) = -7.97$$

$$M''_{BE} = -1.0(15.94) = -15.94$$

Piso 1:

$$M''_{CF} = -0.6(5.39 - 4.82 + 5.44) = -3.16$$

$$M''_{OG} = -0.3(6.01) = -1.80$$

$$M''_{EH} = -0.6(6.01) = -3.61$$

• Cuarto Ciclo:

- Iteración de giro:

$$M'_{AB} = -0.23(40.83 + 9.15 + 2.12 - 7.97) = -10.15$$

$$M'_{AC} = -0.27(44.13) = -11.92$$

$$M'_{CA} = -0.11(5.63 - 11.92 - 4.10 - 7.97 + 3.16) = 2.42$$

$$M'_{CD} = -0.11(-21.97) = 2.42$$

$$M'_{CF} = -0.28(-21.97) = 6.15$$

$$M'_{BA} = -0.15(-40.83 - 10.15 + 4.49 - 15.94) = 9.36$$

$$M'_{BE} = -0.35(-62.43) = 21.85$$

$$M'_{EB} = -0.19(-26.67 + 21.85 - 3.13 - 15.94 + 3.61) = 5.23$$

$$M'_{ED} = -0.08(-27.5) = 2.2$$

$$M'_{EH} = -0.23(-27.5) = 6.33$$

$$M'_{DE} = -0.13(21.04 + 2.20 + 2.42 + 1.80) = -3.10$$

$$M'_{DG} = -0.20(23.86) = -4.77$$

$$M'_{DC} = -0.17(23.86) = -4.06$$

- Iteración por desplazamiento de piso:

Piso 2:

$$M''_{AC} = -0.5(-11.92 + 2.42 + 21.85 + 5.23) = -8.79$$

$$M''_{BE} = -1.0(17.58) = -17.58$$

Piso 1:

$$M''_{CF} = -0.6(6.15 - 4.77 + 6.33) = -4.63$$

$$M''_{DG} = -0.3(7.71) = -2.31$$

$$M''_{EH} = -0.6(7.71) = -4.63$$

- Quinto Ciclo:

- Iteración de giro:

$$M'_{AB} = -0.23(40.83 + 9.36 + 2.42 - 8.79) = -10.08$$

$$M'_{AC} = -0.27(43.82) = -11.83$$

$$M'_{CA} = -0.11(5.63 - 11.82 - 4.06 - 8.79 - 4.63) = 2.60$$

$$M'_{CD} = -0.11(-23.67) = 2.60$$

$$M'_{CF} = -0.28(-23.67) = 6.63$$

$$M'_{BA} = -0.15(-40.83 - 10.08 + 5.23 - 17.58) = 9.49$$

$$M'_{BE} = -0.35(-63.26) = 22.14$$

$$M'_{EB} = -0.19(-26.67 + 22.14 - 3.10 - 17.58 + 4.63) = 5.67$$

$$M'_{ED} = -0.08(-29.84) = 2.39$$

$$M'_{EH} = -0.23(-21.84) = 6.86$$

$$M'_{DE} = -0.13(21.04 + 2.39 + 2.60 - 2.31) = -4.03$$

$$M'_{DG} = -0.20(23.72) = -4.74$$

$$M'_{DC} = -0.17(23.72) = -3.08$$

- Iteración por desplazamiento de piso:

Piso 2:

$$M''_{AC} = -0.5(-11.92 + 2.60 + 22.14 + 5.67) = -9.29$$

$$M''_{BE} = -1.0(18.59) = -18.59$$

Piso 1:

$$M''_{CF} = -0.6(6.63 - 4.74 + 6.86) = -5.25$$

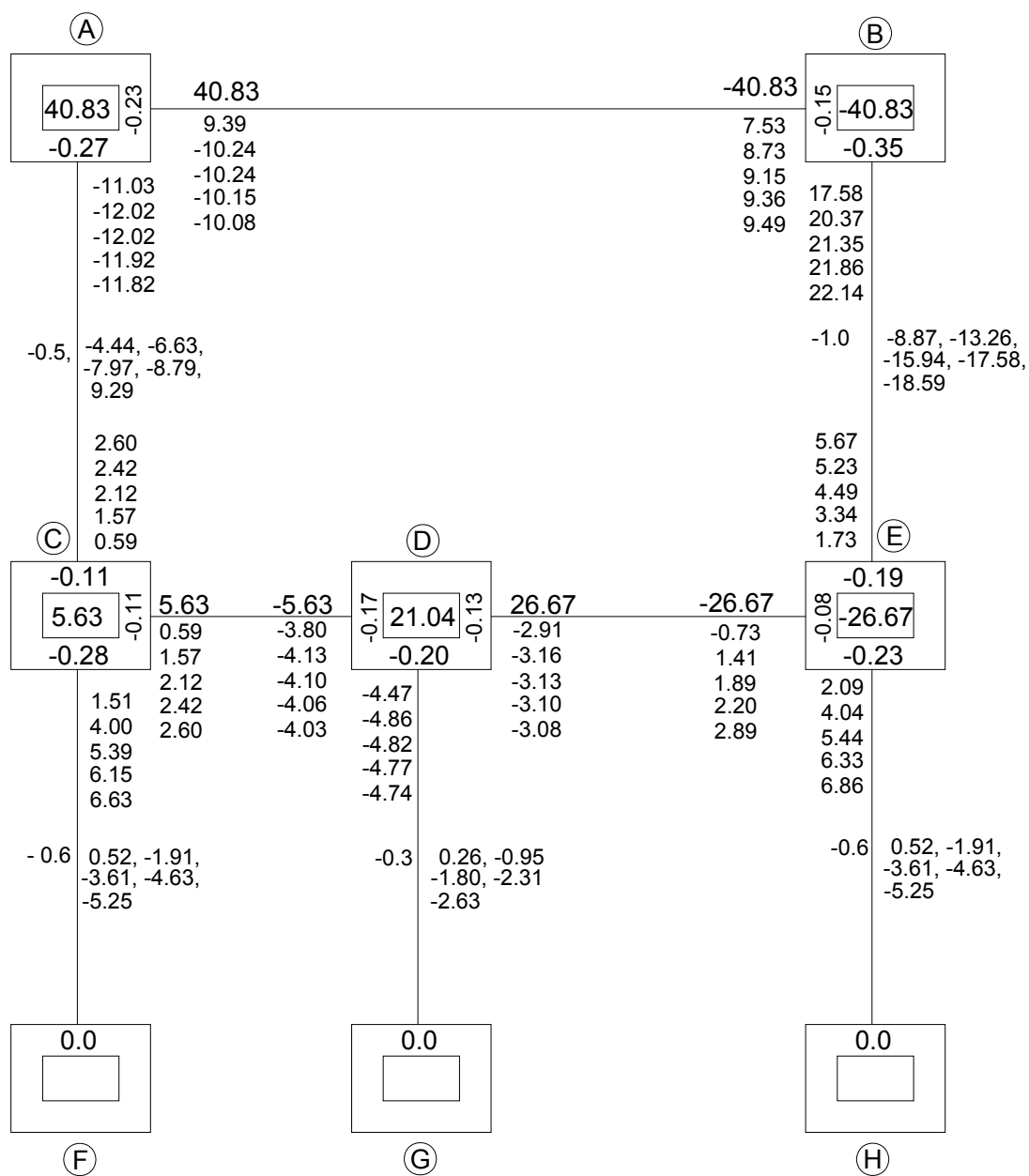
$$M''_{DG} = -0.3(8.75) = -2.63$$

$$M''_{EH} = -0.6(8.75) = -5.25$$

El proceso iterativo se continúa realizando de la misma manera hasta una séptima iteración, en la cual los valores empiezan a converger. Recuerde que el proceso iterativo se puede repetir cuantas veces se requiera según el grado de aproximación deseado.

A continuación se presenta el esquema de cálculo con los resultados obtenidos en las anteriores iteraciones.





j. Cálculo de momentos extremos finales

Los momentos finales en los extremos de los elementos del pórtico se calculan usando los últimos valores obtenidos en el proceso iterativo. En este caso serán los valores de la octava iteración.

Las ecuaciones para el cálculo de los momentos serán:

$$M_{i-j} = M_{i-j}^F + 2 \cdot M'_{i-j} + M'_{j-i} + M''_{i-j}$$

$$M_{j-i} = M_{j-i}^F + M'_{i-j} + 2 \cdot M'_{j-i} + M''_{j-i}$$

Recuerde que los entrepisos del pórtico se desplazan horizontalmente, por lo tanto las vigas no sufren desplazamientos relativos entre los nodos, así el último término en las ecuaciones anteriores es cero para las vigas del pórtico.

$$M_{AB} = 40.83 + 2 \cdot (-10.01) + 9.61 + 0 = 30.42 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

$$M_{BA} = -40.83 - 10.01 + 2 \cdot (9.61) + 0 = -31.62 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

$$M_{AC} = 0 + 2 \cdot (-11.75) + 2.79 - 9.79 = -30.50 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

$$M_{CA} = 0 - 11.75 + 2 \cdot (2.79) - 9.79 = -15.96 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

$$M_{BE} = 0 + 2 \cdot (22.43) + 6.10 - 19.58 = 31.38 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

$$M_{EB} = 0 + 22.43 + 2 \cdot (6.10) - 19.58 = 15.05 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

$$M_{CD} = 5.63 + 2 \cdot (2.79) - 4.01 + 0 = 7.20 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

$$M_{DC} = -5.63 + 2.79 + 2 \cdot (-4.01) + 0 = -10.86 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

$$M_{DE} = 26.67 + 2 \cdot (-3.07) + 2.57 + 0 = 23.10 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

$$M_{ED} = -26.67 - 3.07 + 2 \cdot (2.57) + 0 = -24.60 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

$$M_{CF} = 0 + 2(7.10) + 0 - 5.86 = 8.34 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M_{FC} = 0 + 2(0) + 7.10 - 5.86 = 1.24 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M_{DG} = 0 + 2 \cdot (-4.72) + 0 - 2.93 = -12.37 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M_{GD} = 0 + 2 \cdot (0) - 4.72 - 2.93 = -7.65 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M_{EH} = 0 + 2 \cdot (7.39) + 0 - 5.86 = 8.92 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M_{HE} = 0 + 2 \cdot (0) + 7.39 - 5.86 = 1.53 \text{ kN} - \text{m}.$$

Planteando el equilibrio de momentos en los nodos de la estructura se encuentran algunos errores de cierre, los cuales son aceptables. Para obtener una mayor exactitud en los resultados se continúa el proceso de iteración hasta alcanzar la exactitud deseada.

$$\sum M_A = M_{AB} + M_{AC} = 30.42 - 30.50 = -0.08 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$\sum M_B = M_{BA} + M_{BE} = -0.24 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$\sum M_C = M_{CA} + M_{CD} + M_{CF} = -0.42 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$\sum M_D = M_{DC} + M_{DE} + M_{DG} = -0.13$$

$$\sum M_E = M_{EB} + M_{ED} + M_{EH} = -0.63$$

k. Estática de los elementos:

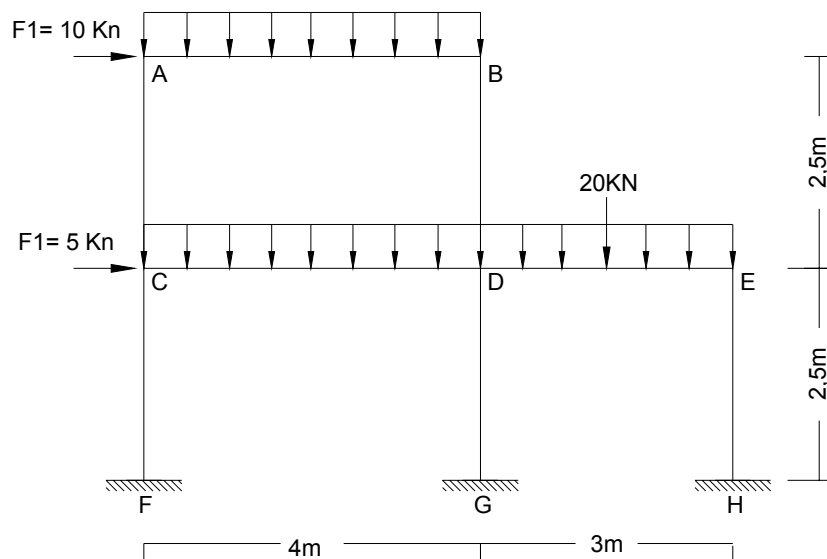
Los valores de las fuerzas cortantes y axiales en cada uno de los elementos se calcularán haciendo uso de la estática como se ha hecho en ejemplos anteriores.

#### Ejemplo 4.4

Calcular el valor de los momentos flectores para el siguiente pórtico.

Supuesto: se trata de una construcción en concreto reforzado con un  $f'_c = 21.1 \text{ MPa}$ .

Calcular las derivas de los pisos.



- Dimensiones de elementos ( $b \times h$ )

Vigas:  $0.4 \times 0.4 \text{ m}$ .

Columnas 2 piso:  $0.35 \times 0.35 \text{ m}$ .

Columnas 1 piso:  $0.40 \times 0.40 \text{ m}$

a. Cálculo de inercias:

Vigas:

$$I = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 = \frac{1}{12} (0.4)(0.4)^3 = 2.13 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

Columnas 2 Piso:

$$\frac{1}{12}(0.35)^4 = 1.25 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

Columnas 1 Piso:

$$\frac{1}{12}(0.4)^4 = 2.13 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

b. Módulo de elasticidad del concreto:

Según la Norma NSR-98 (artículo C.8.5.4.1), el módulo de elasticidad del concreto puede ser calculado mediante la siguiente ecuación (C.8-2d\*):

$$E_c = 3900 \cdot \sqrt{f'_c} \quad \text{en MPa}$$

Donde:

$E_c$  = módulo de elasticidad del concreto, expresado en MPa.

$\sqrt{f'_c}$  = Raíz cuadrada de la resistencia nominal del concreto a la compresión, expresada en MPa

$f'_c$  = resistencia nominal del concreto a la compresión, expresada en MPa.

En este ejercicio  $f'_c = 21.1 \text{ MPa}$

$$E_c = 3900 \cdot \sqrt{21.1} = 17914.55 \text{ MPa} = 17.91 \times 10^6 \text{ KPa}$$

c. Cálculo de la rigidez de cada barra ( $K_{ij}$ ):

$$K_{AB} = K_{CD} = \frac{2 \cdot (17.91 \times 10^6) \cdot (2.13 \times 10^{-3})}{4} = 19074.15$$

$$K_{DE} = \frac{2 \cdot (17.91 \times 10^6) \cdot (2.13 \times 10^{-3})}{3} = 25433.2$$

$$K_{AC} = K_{BD} = \frac{2 \cdot (17.91 \times 10^6) \cdot (1.25 \times 10^{-3})}{2.5} = 17910$$

$$K_{CF} = K_{DG} = K_{EH} = \frac{2 \cdot (17.91 \times 10^6) \cdot (2.13 \times 10^{-3})}{2.5} = 30518.64$$

d. Factor de distribución por giro (  $\mu_{ij}$  ):

Nodo A:

$$\mu_{AB} = -\frac{1}{2} \left( \frac{K_{AB}}{K_{AB} + K_{AC}} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{19074.15}{19074.15 + 17910} \right) = -0.26$$

$$\mu_{AC} = -\frac{1}{2} \left( \frac{17910}{36984.15} \right) = -0.24$$

Nodo B:

$$\mu_{BA} = -\frac{1}{2} \left( \frac{19074.15}{19074.15 + 17910} \right) = -0.26$$

$$\mu_{BD} = -\frac{1}{2} \left( \frac{17910}{36984.15} \right) = -0.24$$

Nodo C:

$$\mu_{CA} = -\frac{1}{2} \left( \frac{17910}{19074.15 + 17910 + 30518.64} \right) = -0.13$$

$$\mu_{CD} = -\frac{1}{2} \left( \frac{19074.15}{67502.79} \right) = -0.14$$

$$\mu_{CF} = -\frac{1}{2} \left( \frac{30518.64}{67502.79} \right) = -0.23$$

Nodo D:

$$\mu_{DB} = -\frac{1}{2} \left( \frac{17910}{19074.15 + 17910 + 30518.64 + 25433.2} \right) = -0.10$$

$$\mu_{DC} = -\frac{1}{2} \left( \frac{19074.15}{92935.99} \right) = -0.10$$

$$\mu_{DG} = -\frac{1}{2} \left( \frac{30518.64}{92935.99} \right) = -0.16$$

$$\mu_{DE} = -\frac{1}{2} \left( \frac{25433.2}{92935.99} \right) = -0.14$$

Nodo E:

$$\mu_{ED} = -\frac{1}{2} \left( \frac{25433.2}{25433.2 + 30518.64} \right) = -0.23$$

$$\mu_{EH} = -\frac{1}{2} \left( \frac{30518.64}{55951.84} \right) = -0.27$$

e. Factor de distribución por desplazamiento de piso ( $\omega_{ij}$ ):

Piso 2:

$$\omega_{AC} = -\frac{3}{2} \left( \frac{K_{AC}}{K_{AC} + K_{BD}} \right) = -\frac{3}{2} \left( \frac{17910}{17910 + 17910} \right) = -0.75$$

$$\omega_{B D} = -\frac{3}{2} \left( \frac{17910}{35820} \right) = -0.75$$

Piso 1:

$$\omega_{C F} = -\frac{3}{2} \left( \frac{30518.64}{30518.64 + 30518.64 + 30518.64} \right) = -0.5$$

$$\omega_{D G} = -\frac{3}{2} \left( \frac{30518.64}{91555.92} \right) = -0.5$$

$$\omega_{E H} = -\frac{3}{2} \left( \frac{30518.64}{91555.92} \right) = -0.5$$

f. Momentos de empotramiento:

$$M_{AB}^F = -M_{BA}^F = \frac{W \cdot L^2}{12} = \frac{15 \cdot (4)^2}{12} = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CD}^F = -M_{DC}^F = \frac{10 \cdot (4)^2}{12} = 13.33 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{DE}^F = -M_{ED}^F = \frac{W \cdot L^2}{12} + \frac{P \cdot L}{8} = \frac{10 \cdot (3)^2}{12} + \frac{20 \cdot (3)}{8} = 15 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

g. Cálculo de  $\sum M_{ij}^F$  en cada nodo:

Nodo A:

$$\sum M_A^F = M_{AB}^F = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Nodo B:

$$\sum M_B^F = M_{BA}^F = -20 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Nodo C:



$$\sum M_C^F = M_{CD}^F = 13.33 \text{ kN} - \text{m}.$$

Nodo D:

$$\sum M_D^F = M_{DC}^F + M_{DE}^F = -13.33 + 15 = 21.04 \text{ kN} - \text{m}$$

Nodo E:

$$\sum M_E^F = M_{ED}^F = -15 \text{ kN} - \text{m}.$$

h. Momentos de entrepiso ( $M_p$ ):

Los momentos de entrepiso se calcularán con la expresión  $M_p = -\frac{(\sum H)(h_i)}{3}$ .

Para el piso 2:

$$\sum H = 10 \text{ kN}$$

$$h_{PISO 2} = 2.5 \text{ m}.$$

$$M_{p_2} = -\frac{10 \cdot 2.5}{3} = -8.33$$

Para el piso 1:

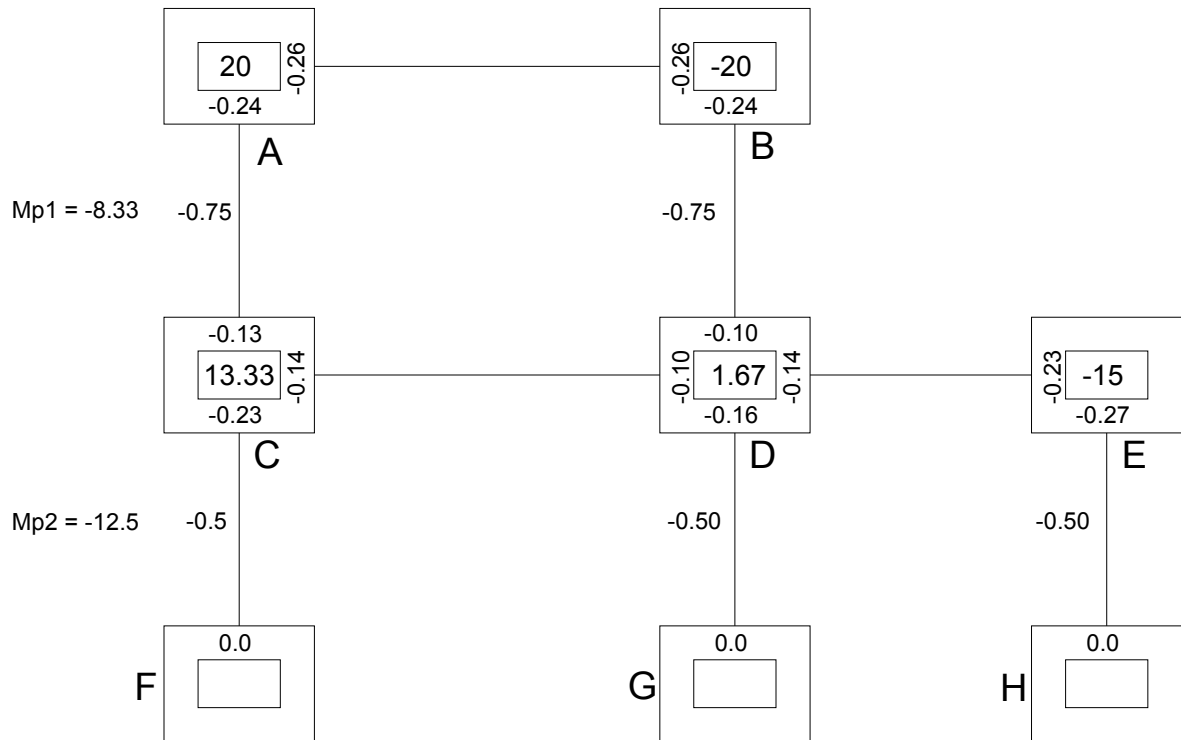
$$\sum H = 10 + 5 = 15 \text{ kN}.$$

$$h_{PISO 1} = 2.5 \text{ m}.$$

$$M_{p_1} = -\frac{15 \cdot 2.5}{3} = -12.5 \text{ kN} - \text{m}.$$

i. Esquema de cálculos para el proceso iterativo:

Los valores obtenidos se colocan en el esquema de cálculo como se muestra a continuación:



#### j. Proceso Iterativo:

El proceso iterativo para el pórtico se lleva a cabo empleando las ecuaciones de giro y luego las de desplazamiento de piso. El orden escogido para realizar las iteraciones de giro es: A – B – E – C – D, y para las iteraciones de desplazamiento es: 2 piso – 1 piso.

- Primer Ciclo

- Iteración por giro:

$$M'_{AB} = -0.26 (20) = -5.2 \text{ kN-m.}$$

$$M'_{AC} = -0.24 (20) = -4.8 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M'_{BA} = -0.26 (-20 - 5.2) = 6.55 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M'_{BD} = -0.24 (-25.2) = -6.05 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M'_{ED} = -0.23 (-15) = 3.45 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M'_{EH} = -0.27 (-15) = 4.05$$

$$M'_{CA} = -0.13 (13.33 - 4.8) = -1.11$$

$$M'_{CD} = -0.14 (8.53) = -1.19$$

$$M'_{CF} = -0.23 (8.53) = -1.96$$

$$M'_{DB} = -0.10 (1.67 + 6.05 + 3.45 - 1.19) = -1.0$$

$$M'_{DE} = -0.14 (9.98) = -1.40$$

$$M'_{DG} = -0.16 (9.98) = -1.60$$

$$M'_{DC} = -0.10 (9.98) = -1.0$$

- Iteración desplazamiento de piso:

La iteración por desplazamiento de piso se realiza usando la siguiente ecuación:

$$M''_{i-j} = \omega_{i-j} \cdot \left[ M_p + \sum_{Col} (M'_{i-j} + M'_{j-i}) \right]$$

Piso 2:

$$M''_{AC} = -0.75(-8.33 - 4.8 - 1.11 + 6.05) = 6.14$$

$$M''_{BD} = -0.75(-9.19) = 6.14$$

Piso 1:

$$M''_{CF} = -0.5(-12.5 - 1.96 - 1.60 + 4.05) = 6.0$$

$$M''_{DG} = -0.5(-12.01) = 6.0$$

$$M''_{EH} = -0.5(-12.01) = 6.0$$

- Segundo Ciclo

- Iteración por giro:

$$M'_{AB} = -0.26 (20 + 6.55 - 1.11 + 6.89) = -8.41$$

$$M'_{AC} = -0.24 (32.33) = -7.76$$

$$M'_{BA} = -0.26 (-20 - 8.41 - 1.0 + 6.89) = 5.85$$

$$M'_{BD} = -0.24 (-22.52) = 5.40$$

$$M'_{ED} = -0.23 (-15 - 1.4 + 6.0) = 2.39$$

$$M'_{EH} = -0.27 (-10.4) = 2.81$$

$$M'_{CA} = -0.13 (13.33 - 7.76 - 1.0 + 6.89 + 6.0) = -2.27$$

$$M'_{CD} = -0.14 (17.46) = -2.15$$

$$M'_{CF} = -0.23 (17.46) = -4.02$$

$$M'_{DB} = -0.10 (1.67 + 5.40 + 2.39 - 2.45 + 6.0 + 6.89) = -1.99$$

$$M'_{DE} = -0.14 (19.9) = -2.79$$

$$M'_{DG} = -0.16 (19.9) = -3.19$$

$$M'_{DC} = -0.10 (19.9) = -1.99$$

- Iteración por desplazamiento de piso:

Piso 2:

$$M''_{AC} = M''_{BD} = -0.75(-8.33 - 7.76 - 2.27 + 5.40 - 1.99) = 11.22$$

Piso 1:

$$M''_{CF} = M''_{DG} = M''_{EH} = -0.5(-12.5 - 4.02 - 3.19 + 2.81) = 8.45$$

- Tercer Ciclo

- Iteración por giro:

$$M'_{AB} = -0.26 (20 + 5.85 - 2.27 + 11.22) = -9.05$$

$$M'_{AC} = -0.24 (34.8) = -8.35$$

$$M'_{BA} = -0.26 (-20 - 9.05 - 1.99 + 11.22) = 5.15$$

$$M'_{BD} = -0.24 (-19.82) = 4.76$$

$$M'_{ED} = -0.23 (-15 - 2.79 + 8.45) = 2.15$$

$$M'_{EH} = -0.27 (-9.34) = 2.52$$

$$M'_{CA} = -0.13 (13.33 - 8.35 - 1.99 + 11.22 + 8.45) = -2.95$$

$$M'_{CD} = -0.14 (22.66) = -3.17$$

$$M'_{CF} = -0.23 (22.66) = -5.21$$

$$M'_{DB} = -0.10 (1.67 + 4.76 + 2.15 - 3.17 + 11.22 + 8.45) = -2.51$$

$$M'_{DE} = -0.14 (25.08) = -3.51$$

$$M'_{DG} = -0.16 (25.08) = -4.01$$

$$M'_{DC} = -0.10 (25.08) = -2.51$$

- Iteración por desplazamiento de piso:

Piso 2:

$$M''_{AC} = M''_{BD} = -0.75(-8.33 - 8.35 - 2.95 + 4.76 - 2.51) = 13.03$$

Piso 1:

$$M''_{CF} = M''_{DG} = M''_{EH} = -0.5(-12.5 - 5.21 - 4.01 + 2.52) = 9.60$$

Se continúa el proceso iterativo hasta una séptima iteración. El valor máximo de cierre obtenido para los nodos es de 0.03 KN –m.

k. Cálculo de momentos extremos finales

Los momentos en los extremos de los elementos se calculan de la misma manera como se hizo en el ejercicio anterior.

$$M_{AB} = 20 + 2(-9.19) + 4.67 = 6.29 \text{ kN – m.}$$

$$M_{BA} = -20 + 2(4.67) - 9.19 = -19.58 \text{ kN – m.}$$

$$M_{AC} = 2(-8.48) - 3.44 + 14.11 = -6.29 \text{ kN – m.}$$

$$M_{CA} = 2(-3.44) - 8.48 + 14.11 = -1.25 \text{ kN – m.}$$

$$M_{BD} = 2(4.31) - 2.87 + 14.11 = 19.86 \text{ kN – m.}$$

$$M_{DB} = 2(-2.87) - 4.31 + 14.11 = 12.68 \text{ kN – m.}$$

$$M_{CD} = 13.33 + 2(-3.71) - 2.87 = 3.04 \text{ kN – m.}$$

$$M_{DC} = -13.33 + 2(-2.87) - 3.71 = -22.78 \text{ kN – m.}$$

$$M_{DE} = 15.0 + 2(-4.02) + 1.98 = 8.94 \text{ kN – m.}$$

$$M_{ED} = -15.0 + 2(1.98) - 4.02 = -15.06 \text{ kN – m.}$$

$$M_{CF} = 2(-6.09) + 10.43 = -1.75 \text{ kN – m.}$$

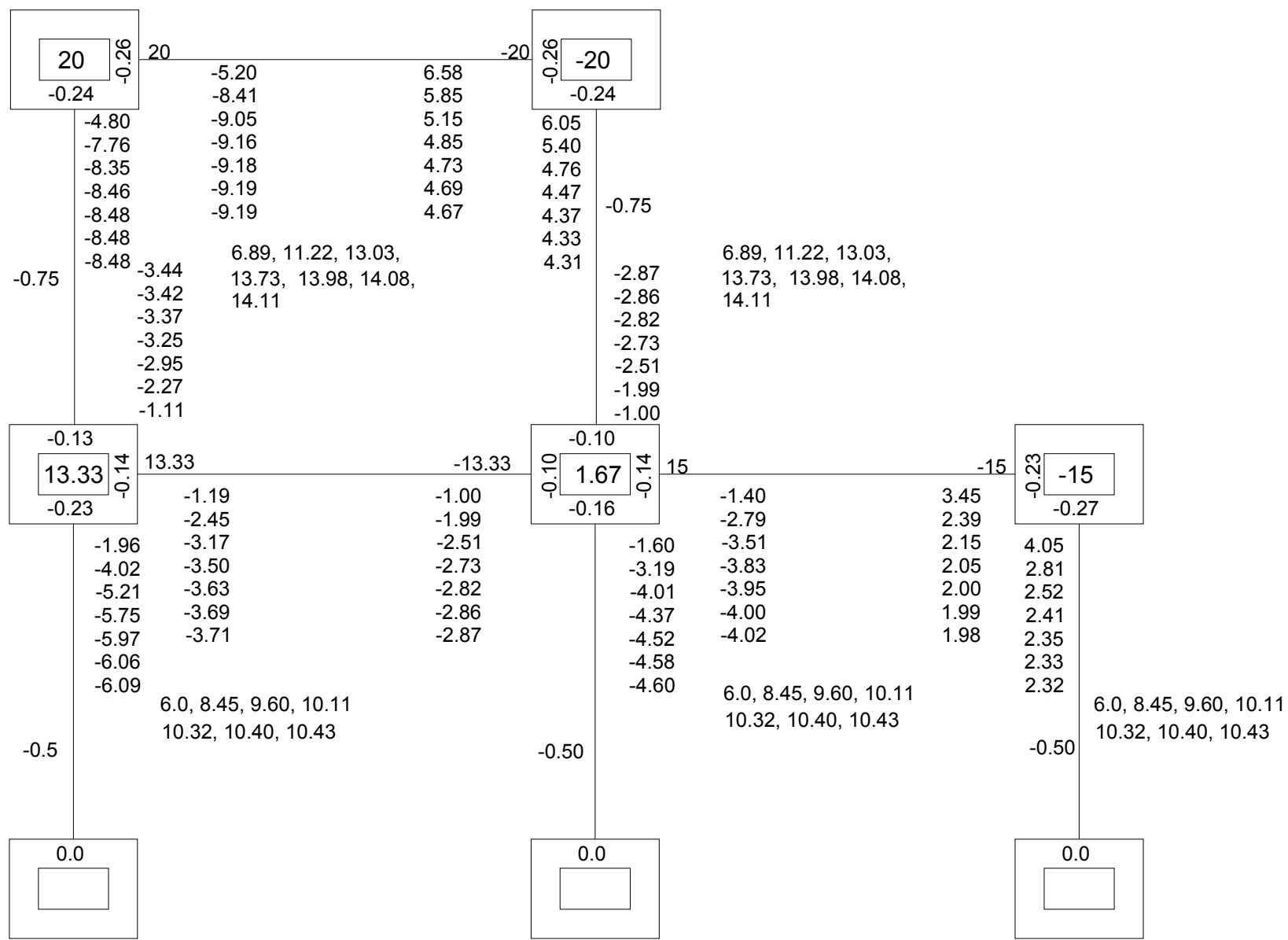
$$M_{FC} = -6.09 + 10.43 = 4.33 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M_{DG} = 2(-4.60) + 10.43 = 1.23 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M_{GD} = -4.60 + 10.43 = 5.83 \text{ kN} - \text{m}.$$

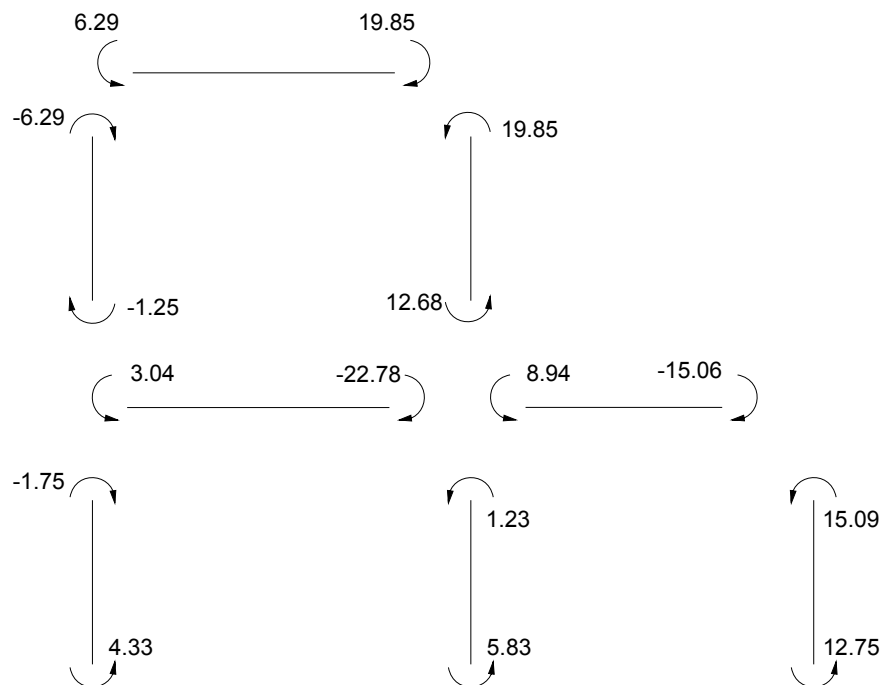
$$M_{EH} = 2(2.32) + 10.43 = 15.07 \text{ kN} - \text{m}.$$

$$M_{HE} = 2.32 + 10.43 = 12.75 \text{ kN} - \text{m}.$$





A continuación se presenta el diagrama con los momentos extremos en cada barra:

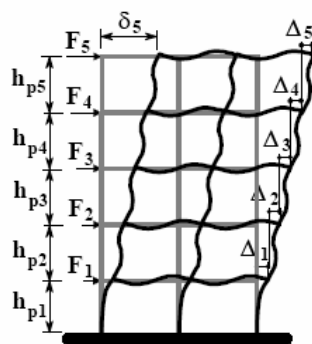


#### I. Calculo de derivas en pórtico:

Según la Norma NSR – 98 (Artículo A.6 ) La deriva de piso se puede definir como la diferencia entre los desplazamientos horizontales de los niveles entre los cuales está comprendido el piso.

En el siguiente gráfico se puede entender un poco mejor la anterior definición:

**Figura 53:** Representación de las Derivas



Definición de la deriva

$$\Delta_i = \delta_i - \delta_{i-1}$$

La deriva calculada en los diferentes niveles de la edificación no puede exceder los límites establecidos en la tabla A.6-1 de la NSR – 98, en la cual la deriva máxima se expresa como un porcentaje de la altura de piso  $h_{pi}$ :

**Tabla 1:** Derivas Máximas

**DERIVAS MAXIMAS COMO PORCENTAJE DE  $h_{pi}$**

Estructuras de:	Deriva máxima
concreto reforzado, metálicas y de madera	1.0% (0.010 $h_{pi}$ )
de mampostería	0.5% (0.005 $h_{pi}$ )

El control de derivas en una edificación es de gran importancia principalmente al analizar los efectos de sismo en la estructura. Algunos razones por las que se deben verificar las derivas son:

- Verificar si ocurre deformación inelástica en los elementos estructurales y no estructurales.
- Comprobar la estabilidad global de la estructura.
- Verificar si se produce algún daño en los elementos estructurales que no hacen parte del sistema de resistencia sísmica y en los elementos no estructurales, tales como muros divisorios, particiones, enchapes, acabados, instalaciones eléctricas, mecánicas, etc.
- Evitar generar alarma y pánico entre las personas que ocupen la edificación.

e. Verificar si la edificación podría llegar a golpear alguna de las edificaciones contiguas.

Una vez mencionados algunos conceptos sobre la deriva de piso, se calculara su valor para cada piso.

El valor de la deriva en cada piso será el valor del desplazamiento relativo ocurrido entre los extremos de las columnas en cada nivel. Recuérdese que el desplazamiento relativo de las columnas del mismo piso será el mismo.

Haciendo uso del último termino de la ecuación de momentos extremos, se tiene:

$$M''_{ij} = \frac{6EI}{L^2} \Delta \quad \text{Ecuación 4.51}$$

Despejando el término  $\Delta$ :

$$\Delta = \frac{M''_{ij} \cdot L^2}{6EI} \quad \text{Ecuación 4.52}$$

Esta será la ecuación para calcular el valor de la deriva de piso.

Deriva primer piso ( $\Delta_1$ ):

$$M''_{CF} = M''_{DG} = M''_{EH} = 10.42 \text{ kN} - \text{m}$$

$$I = 2.13 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$Ec = 17.91 \times 10^6 \text{ KPa}$$

$$\Delta_1 \text{ maximo permisible} = 0.01 \cdot (2.5) = 2.5 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\Delta_1 = \frac{10.43 \cdot (2.5)^2}{6 \cdot (17.91 \times 10^6) \cdot (2.13 \times 10^{-3})} = 2.9 \times 10^{-4} \text{ m} \quad \text{Cumple (✓)}$$

Deriva segundo piso ( $\Delta_2$ ):

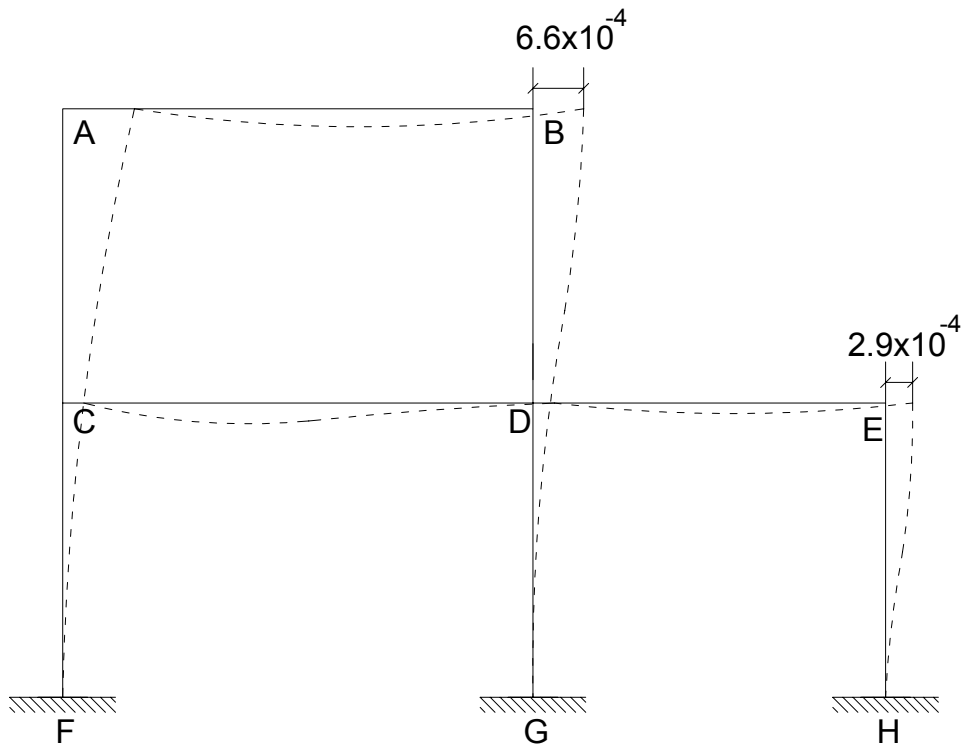
$$M''_{AC} = M''_{BD} = 14.11 \text{ kN} - \text{m}$$

$$I = 1.25 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$E_c = 17.91 \times 10^6 \text{ KPa}$$

$$\Delta_2 \text{ maximo permisible} = 0.01 \cdot (2.5) = 2.5 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\Delta_2 = \frac{14.11 \cdot (2.5)^2}{6 \cdot (17.91 \times 10^6) \cdot (1.25 \times 10^{-3})} = 6.6 \times 10^{-4} \text{ m} \quad \text{Cumple (✓)}$$



## **5 IDEALIZACIÓN Y ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS**

### **5.1 IDEALIZACIÓN ESTRUCTURAL**

El proceso de análisis y diseño estructural esta conformado por una serie de etapas secuenciales que finalizan con la realización de unos planos constructivos. La primera etapa de dicho proceso, y tal vez la mas importante y subjetiva, es aquella que se conoce como idealización estructural, en la cual se transforma el sistema a construir en un modelo matemáticamente manejable, base y fundamento del proceso posterior de análisis y diseño.

La idealización estructural es talvez la etapa en la cual la experiencia, buen juicio e intuición del ingeniero juegan el papel más importante.

Así una buena concepción del sistema estructural lograra resultados de diseño óptimos y seguros. Por el contrario, una mala interpretación del mismo, puede llevar a graves errores de diseño y construcción, independientemente de que tan bien o con que grado de precisión se hagan estas ultimas etapas, lográndose por lo tanto estructuras peligrosas.

No obstante existe la posibilidad de obtener valores de deriva y estabilidad dentro de los rangos admisibles (según la NSR – 98) para estructuras con serios problemas de comportamiento. La razón de ello es la adopción de una idealización equivocada no acorde con el comportamiento real, mostrara deformaciones y esfuerzos falsos, que al ser comparados con los valores de chequeo calculados cumplirán a cabalidad.

Por lo que puede afirmarse que “El proceso de chequeo será definitivamente correcto en cuanto que la idealización formulada sea apropiada”.

En la actualidad es una practica generalizada el idealizar las estructuras convencionales en forma mecánica, sin llevar a cabo ningún análisis previo de comportamiento esperado y dando importancia mas bien a los procesos de diseño y despiece de los elementos estructurales. Debe tenerse en cuenta, sin embargo, que la idealización adoptada comienza a ser relevante cuando la estructura analizada presenta irregularidades en su geometría o combina varios sistemas estructurales.

También hay que reconocer, que aun cuando se haga una idealización exacta que modele el comportamiento real de una estructura, si esta no se construye como se indica en los planos de diseño, la estructura podrá tener un comportamiento diferente al obtenido en el proceso de idealización, con ello se concluye que:

*“Las estructuras se comportan como se construyen y no como se idealizan”*

## **5.2 CARGAS, FUERZAS Y COMBINACIONES DE CARGAS ( TITULO B NSR – 98 )**

El título B de la NSR 98 da los requisitos mínimos que deben cumplir las edificaciones en lo que respecta a cargas diferentes a las fuerzas o efectos que impone el sismo, las combinaciones de carga que deben considerarse tanto en el diseño para estados límites, como por el método de esfuerzos admisibles, los coeficientes de reducción de la capacidad de miembros de concreto en estructuras mixtas, y las diferentes cargas que pueden actuar ensobre la estructura.

### **5.2.1 Cargas y Fuerzas**

Las cargas y las fuerzas son las solicitaciones a las que se ve sometida un sistema estructural. Estas cargas provienen del peso de todos los elementos permanentes en la construcción, los ocupantes y sus posesiones, efectos ambientales, asentamientos

diferenciales y cambios dimensionales que se restringen. Las cargas permanentes son cargas que varían muy poco en el tiempo y cuyas variaciones son pequeñas en magnitud.

Algunas de las cargas y fuerzas que pueden estar presentes individualmente o simultáneamente en una estructura son:

- a. Cargas Muertas
- b. Cargas Vivas
- c. Fuerza de Sismo
- d. Cargas debidas a empuje de tierra o presiones hidrostáticas
- e. fuerzas de viento.

A continuación se da una pequeña descripción de algunas de las cargas y fuerzas:

- Cargas Muertas:

Las cargas muertas consideran todas las cargas de los elementos permanentes de construcción de la estructura, incluyendo su peso propio, los muros, pisos, cubiertas, cielos rasos, escaleras, equipo fijo y todas aquellas cargas que no son causadas por la ocupación y uso de la edificación. Para calcular las cargas muertas deben utilizarse las masas reales de los materiales. La NSR 98 permite utilizar como guía los valores mínimos de las tablas que se encuentran en el título B – Sección B.3.

- Cargas Vivas

Las cargas vivas son aquellas cargas producidas por el uso y ocupación de la edificación y no debe incluir cargas ambientales tales como viento, sismo, ni la carga muerta. En el caso de las cubiertas son causadas por los materiales, equipos y trabajadores que se necesitan para su mantenimiento, además por las personas que tengan acceso a ella.

También se considera como carga viva la debida a la acumulación de granizo o nieve dado el caso, aunque no sea común en Colombia. Las cargas vivas que se utilicen en el diseño de la estructura deben ser las máximas cargas que pueden esperarse en la vida útil de la estructura a causa de su uso. La NSR 98 permite utilizar como guía los valores mínimos de las tablas que se encuentran en el título B – Sección B.4.

- **Fuerza de Sismo**

Se puede definir como la sollicitación a la que se ve sometida una estructura durante la ocurrencia de un sismo. Estas sollicitaciones se caracterizan por ser repentinas, de corta duración y por tener eventualmente efectos devastadores sobre las construcciones. La NSR 98 presenta en su capítulo A.3.4 algunos de los métodos de análisis usados para determinar los efectos sísmicos sobre una edificación, entre ellos están:

- Método de la fuerza horizontal equivalente
- Método del análisis Dinámico Elástico
- Método del análisis Dinámico Inelástico

- **Fuerza de viento**

Es la fuerza que genera el viento al golpear la estructura desde cualquier dirección. La NSR 98 presenta en su capítulo B.6 el análisis de esta fuerza y algunos métodos para su cálculo.

### **5.2.2 Combinaciones de cargas**

Como se sabe la estructura y sus componentes necesitan ser diseñados para las condiciones mas criticas de carga. Cabe mencionar que más de una carga puede actuar sobre la estructura en el mismo instante.

Estas condiciones críticas de carga, son las que se obtienen por medio de las combinaciones de carga. La NSR – 98 Titulo B (Sección B.2) muestra las combinaciones básicas de carga para estructuras de concreto o mampostería estructural (Sección B.2.4), así como las combinaciones de carga para estructuras de



acero y estructuras mixtas (Sección B.2.5), usando el método del estado limite de resistencia.

A continuación se presentan las combinaciones básicas de carga usadas en el diseño de las estructuras de concreto o mampostería estructural (Sección B.2.4):

- $1.4D + 1.7L$
- $1.05D + 1.28L + 1.28W$
- $0.9D + 1.3W$
- $1.05D + 1.28L + 1.0E$
- $0.9D + 1.0E$
- $1.4D + 1.7L + 1.7H$
- $1.05D + 1.28L + 1.05T$
- $1.4D + 1.4T$

Donde:

**D** = Carga Muerta de la estructura.

**L** = Cargas vivas actuantes en la estructura.

**E** = fuerzas sísmicas reducidas de diseño ( $E = F_s / R$ ) que se emplean para diseñar los miembros estructurales.

**H** = Cargas debidas al empuje lateral del suelo o a presión hidrostática.

**T** = Fuerzas y efectos causados por expansión o contracción debida a cambios de temperatura, retracción de fraguado, flujo plástico, cambios de humedad, asentamientos diferenciales o combinación de varios de estos efectos.

**W** = Carga de Viento.

Los coeficientes de mayoración que aparecen acompañando a las cargas en las diferentes combinaciones se determinan por medio de métodos estadísticos, los cuales tienen en cuenta la probabilidad de ocurrencia de cada una de las cargas, sus combinaciones y la incertidumbre que se maneja al calcular el valor de cada una de ellas.

### **5.3 Análisis de la estructura**

El análisis estructural tiene como propósito el determinar el efecto que producen las cargas actuantes sobre la estructura en cada uno de los elementos que la componen.

Cualquier estructura es un todo continuo, pero para fines de análisis se puede descomponer en cada uno de los elementos que la conforman, como lo serían las barras de una cercha, las columnas, las vigas y la placa de un edificio, entre otros.

Una vez dividida la estructura en cada uno de sus componentes, se pueden calcular las fuerzas internas (fuerzas axiales, fuerzas cortantes y momentos), así como las deformaciones axiales, las deflexiones y rotaciones en cada uno de los elementos.

Hoy en día se cuenta con un gran número programas computacionales (Software) que permiten analizar de una manera práctica, rápida y sencilla el comportamiento de la estructura ante cualquier tipo de carga y obtener los valores de las fuerzas internas y de las deformaciones. Sin embargo, se recomienda conocer a profundidad las variables de cálculo y las consideraciones que el programa tiene en cuenta para realizar el análisis.

### Ejemplo 5.1

El presente ejercicio tiene como fin, mostrar a grandes rasgos los pasos que se deben tener en cuenta al analizar una estructura, en este caso es una vivienda multifamiliar de 3 niveles como se muestra a continuación:

## CONJUNTO RESIDENCIAL FRAILEJONES



## Vivienda Tipo



## Corte medio de la Vivienda







## Detalles de acabado de la edificación



### 1. Ficha del proyecto

### 1.1 Características generales:

- a. Nombre del proyecto: Unidad Residencial Frailejones
- b. Dirección: Carrera 39 N° 45 – 27 Bucaramanga - Santander
- c. Tipo de edificación: Vivienda multifamiliar
- d. Numero de niveles: 3
- e. Altura total de la Edificación: 8.60 m.
- f. Ubicación con respecto a otras viviendas: Colinda con 2 viviendas, una a cada lado de la edificación.
- g. Año de construcción: 2007

### 1.2 Características estructurales:

- a. Sistema estructural:

El sistema estructural que presenta la edificación es un sistema aporticado con nudos rígidos. Este sistema esta formado por un conjunto de vigas y columnas interconectadas entre si por medio de nudos capaces de transmitir momentos flectores de un elemento a otro.

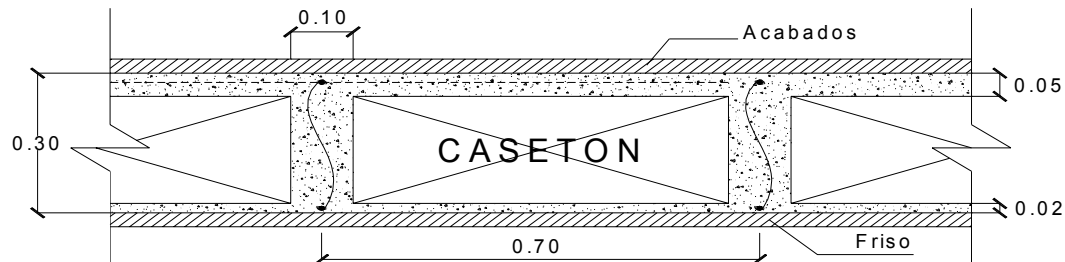
- b. Materiales:   - Concreto Reforzado  $f'_c=21$  MPa.  
                      - Acero de refuerzo    $f_y=420$  MPa.

Cabe mencionar que el concreto reforzado es uno de los materiales mas populares y desarrollados en la actualidad, ya que aprovecha en forma muy eficiente las características de buena resistencia a la compresión, durabilidad, resistencia al fuego y moldeabilidad del concreto, junto con las de alta resistencia a la tensión y ductilidad del acero, para formar un material compuesto que ofrece muchas ventajas sobre otros materiales.



c. Placa de entrepiso:

La placa de entrepiso presente en la estructura es una losa armada en una dirección y aligerada con casetón de gadua. Su altura es de 0.30 m.



Las losas o placas de entrepiso tienen como función soportar las cargas de servicio como el mobiliario y las personas, lo mismo que su propio peso y el de los acabados como los pisos, entre otros.

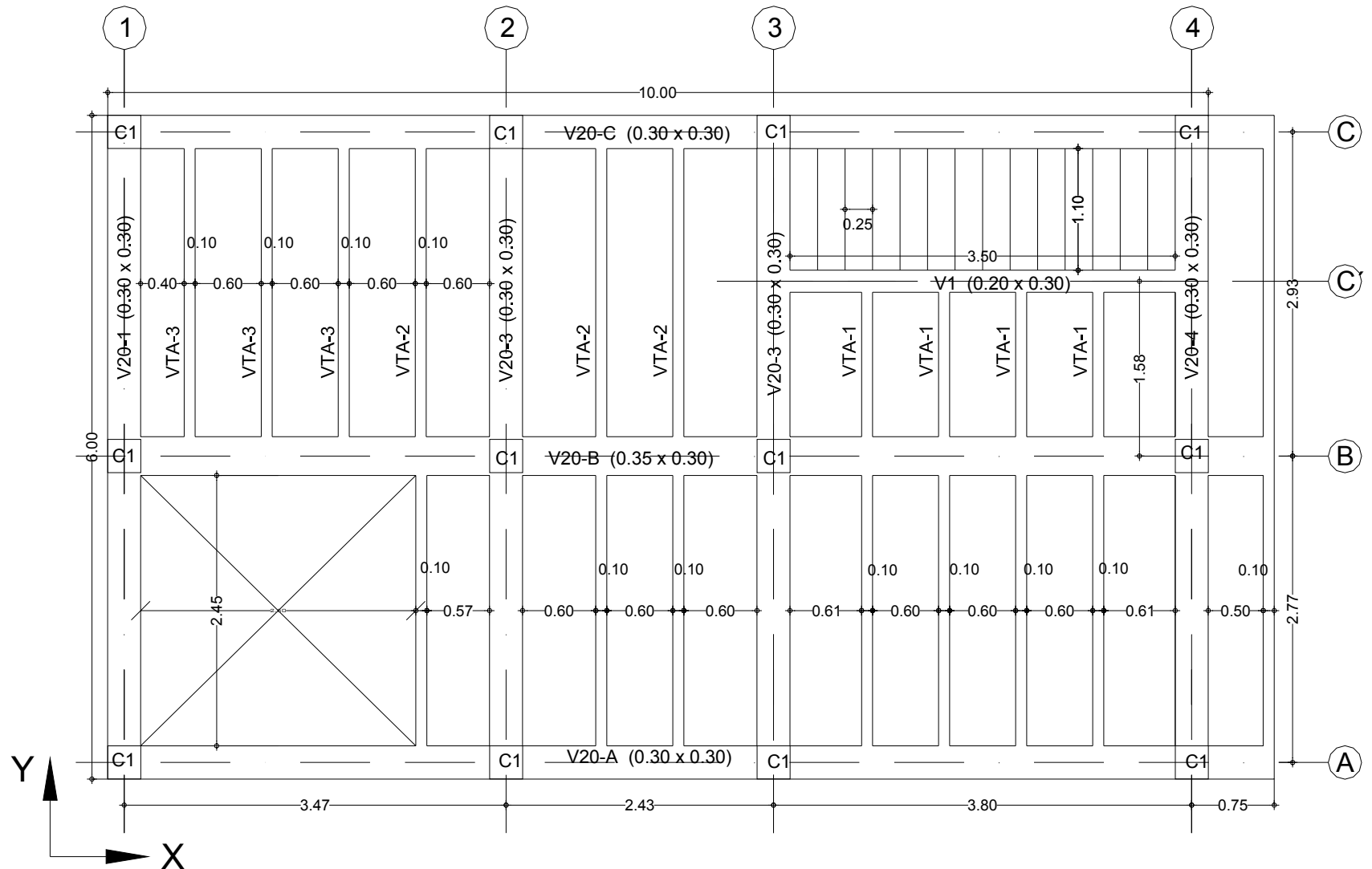
d. Elementos estructurales:

Los elementos que se identificaron en la estructura son las Vigas y columnas del sistema pórtico. Las secciones de estos elementos se muestran en el plano de la planta estructural.

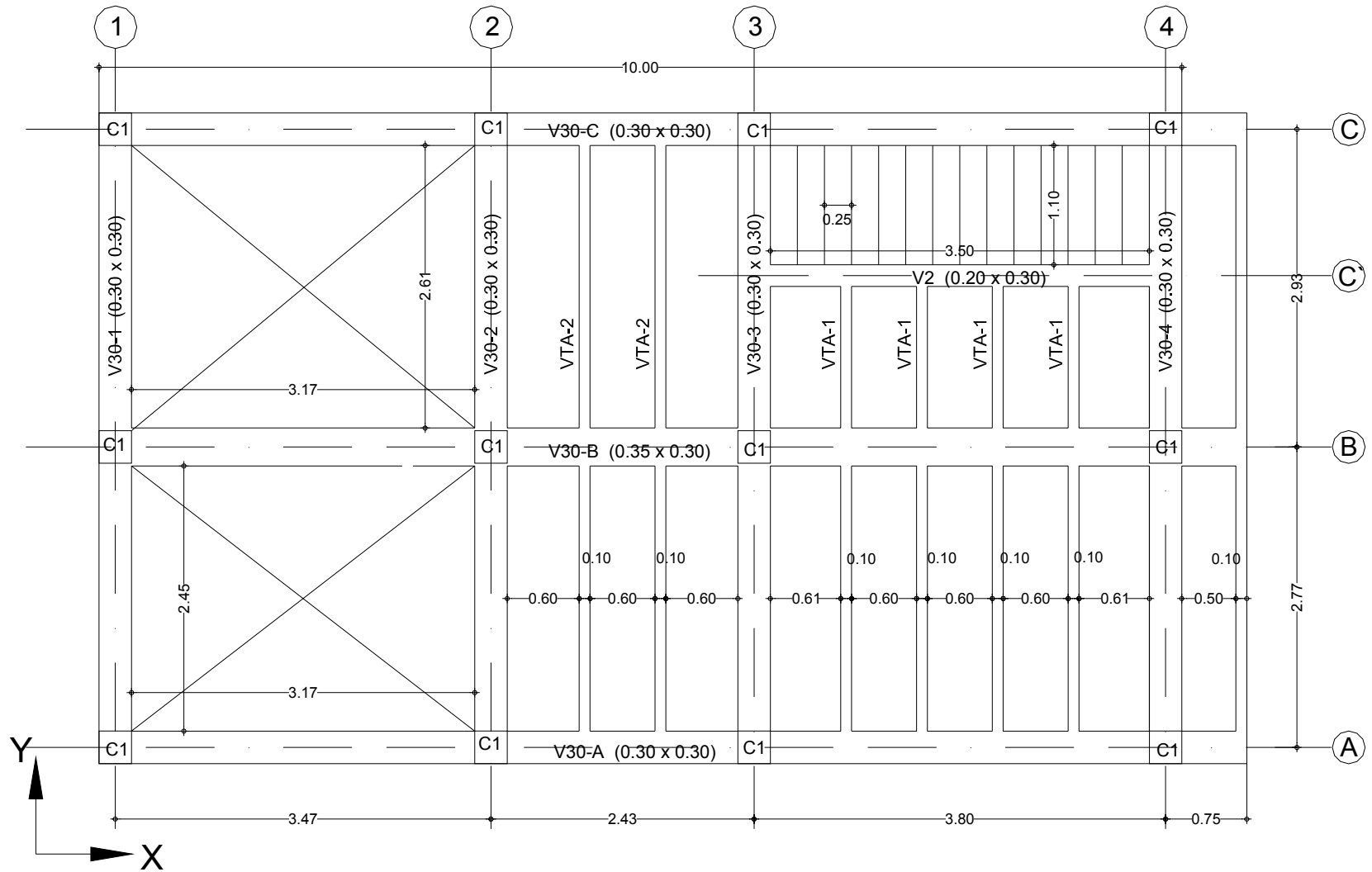
1.3 Características del suelo:

- a. Profundidad de la cimentación: - 0.6 m. con respecto al nivel 0.00 del proyecto arquitectónico
- b. Tipo de Suelo: S2 ( Clasificación NSR – 98 A.2.4.1)
- c. Peso específico del suelo:  $18 \text{ KN} / \text{m}^2$ .

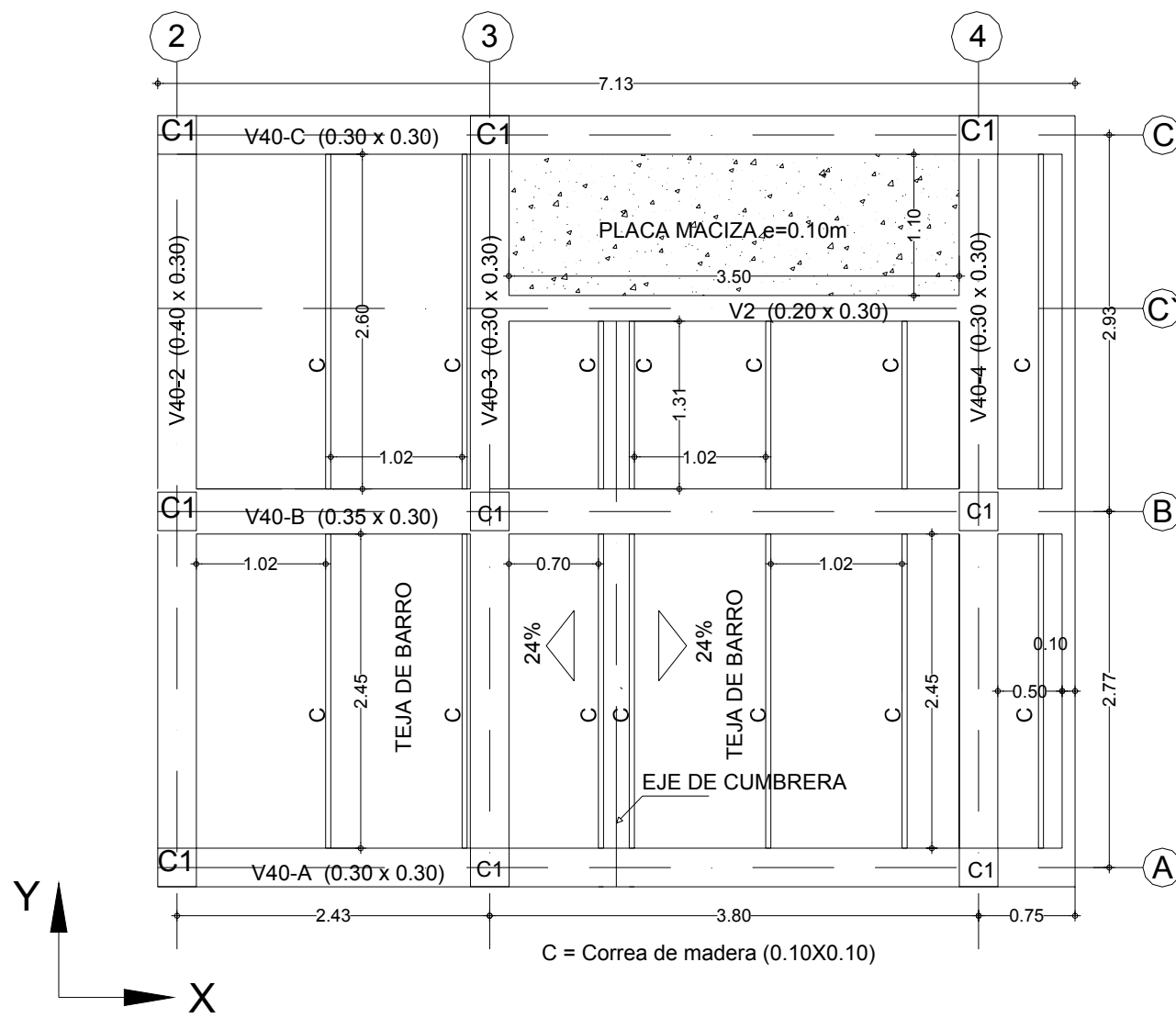
# PLANTA SEGUNDO PISO - NIVEL + 2.80 m.



# PLANTA TERCER PISO - NIVEL + 5.60 m.



# PLANTA CUBIERTA - NIVEL + 8.40 m.



Sistema pórtico con muros de fachada

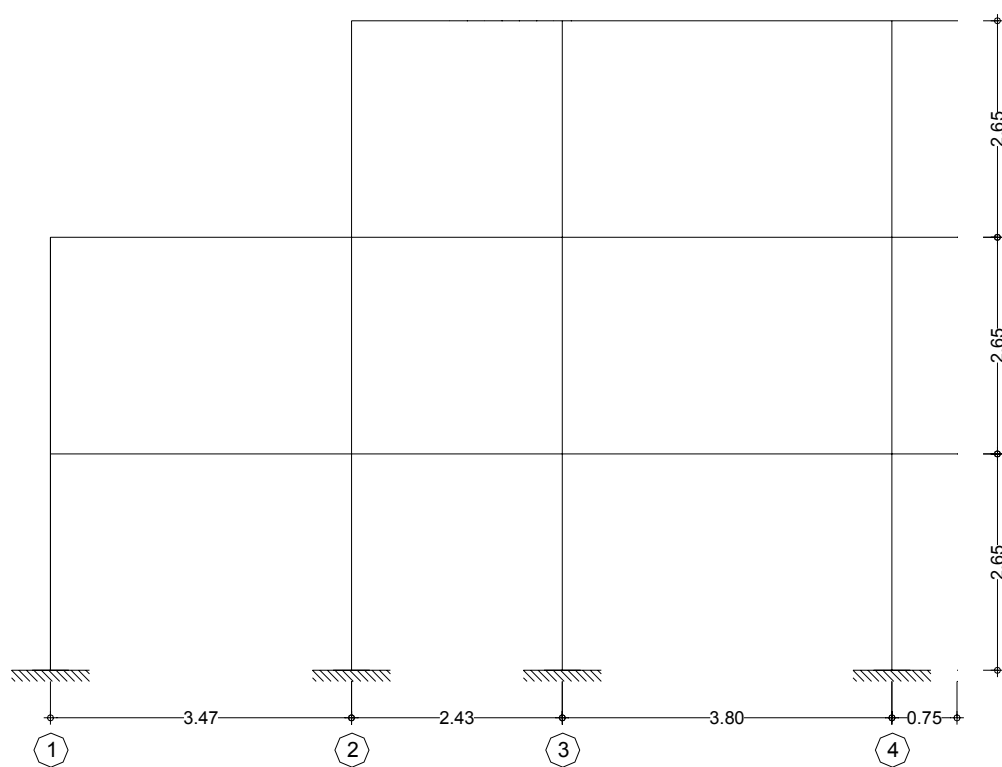


Sistema Aporticado de la edificación

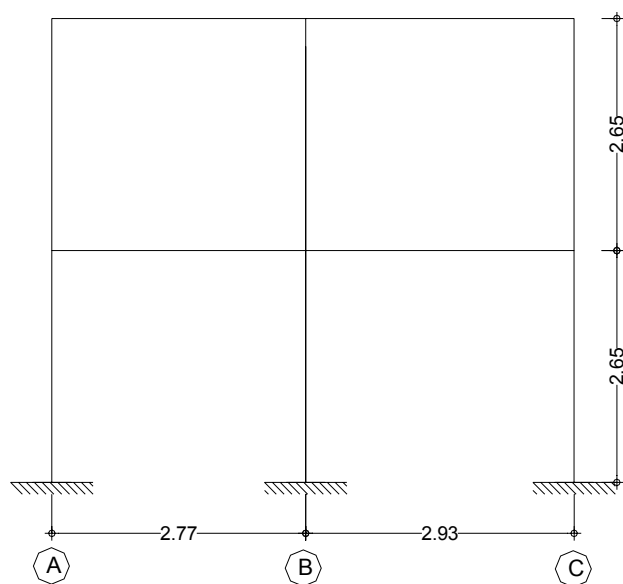


## Idealización de los elementos estructurales

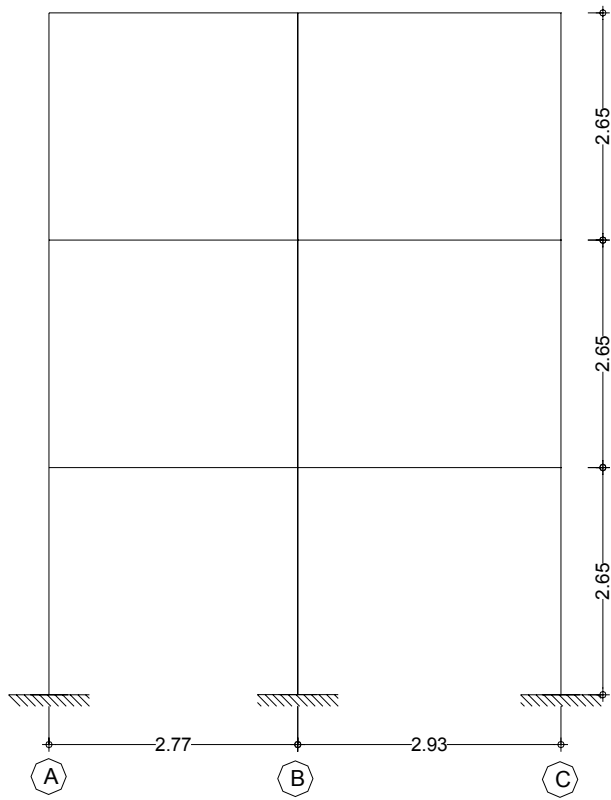
Pórtico A – B – C.



Pórtico 1.

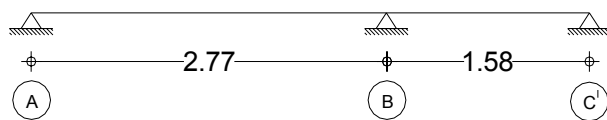


## Pórtico 2 – 3 – 4.

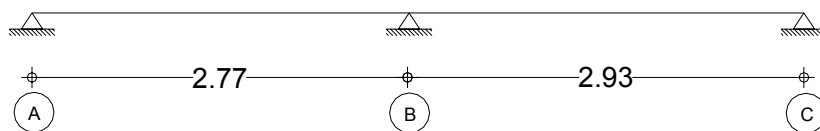


## Viguetas

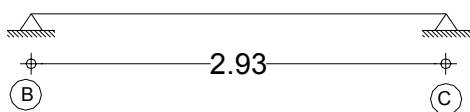
### Vigueta Tipo 1



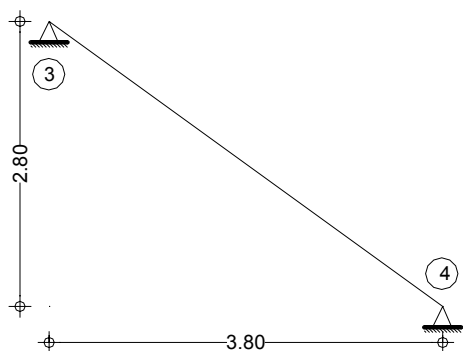
### Vigueta Tipo 2



### Vigueta Tipo 3

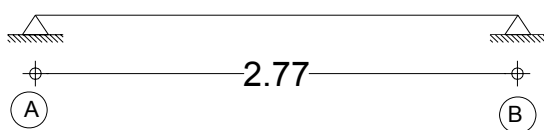


### Escalera 1 a 2 piso y 2 a 3 piso.

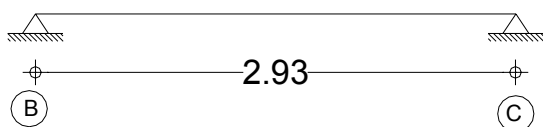


### Listones de madera

#### Listón Tipo 1

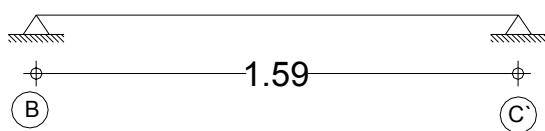


#### Listón Tipo 2





### Listón Tipo 3



## 2. Evalúo de Cargas y fuerzas

Para el análisis, diseño y construcción de las diferentes estructuras en el campo ingeniería civil, se deben considerar y analizar todas las clases de cargas y fuerzas que actúan sobre la estructura a lo largo de su vida útil.

Como patrón en los cálculos de las cargas y fuerzas actuantes sobre la estructura se usaran las Normas Colombianas de Diseño y Construcción Sismo resistentes **NSR-98** **titulo B Cargas**.

### 2.1 Evalúo de Cargas Gravitacionales

#### 2.1.1 Cargas Muertas (Capítulo B.3 NSR - 98)

Como se menciona al inicio del capítulo, la carga muerta es la carga vertical debida al peso de todos los elementos permanentes, ya sean estructurales o no estructurales.

En el inciso B.3.2 y B.3.3 de la NSR-98 se presentan valores mínimos de densidades y cargas muertas de algunos de los materiales más típicos usados en la construcción. A continuación muestran algunos de estos valores:

<b>Masas de los Materiales (B.3.2)</b>	
<i>Material</i>	<i>Densidad</i>
Concreto Reforzado	2 400 kg/m <sup>3</sup>
Concreto Simple	2 300 kg/m <sup>3</sup>
Enchape Granito	1 550 kg/m <sup>3</sup>
Mampostería de ladrillo hueco	1 300 kg/m <sup>3</sup>
Agua dulce	1 000 kg/m <sup>3</sup>
<b>Cargas Muertas minimas m2 (B.3.3 )</b>	
Teja de barro (incluido el mortero)	0.80 kN/m <sup>2</sup>
Impermeabilización	0.15 kN/m <sup>2</sup>
Cielos rasos de madera	0.10 a 0.50 kN/m <sup>2</sup>

#### a. Techo

En este nivel se encuentra presente la estructura de cubierta, un tanque de abastecimiento de agua que se apoya sobre una pequeña losa maciza de concreto.

A continuación se presenta el cálculo de la carga muerta de estos elementos:

- Cubierta:

La cubierta de la edificación analizada esta conformada por tejas de barro y por el entramado de madera que las sostiene. Tomando los datos de la tabla B.3.3 de la NSR 98 se obtiene el peso total de la cubierta por metro cuadrado.

<i>W teja</i>	.....	0.8 kN / m <sup>2</sup>
<i>W entramado</i>	.....	0.3 kN / m <sup>2</sup>
<b>W total cubierta</b>	.....	<b>1.10 kN / m<sup>2</sup></b>

- Losa Maciza

Esta losa tiene como función resistir la carga del tanque elevado. Las cargas presentes en esta losa serán: peso propio y el peso del tanque de agua.

Consideración: La carga del tanque del agua se distribuirá sobre toda la placa.

### Peso Tanque elevado

Especificaciones		
Volumen del tanque	.....	0.5 m <sup>3</sup>
Peso propio tanque	.....	12 kg.
Densidad Agua	.....	1000 kg / m <sup>3</sup>
Gravedad	.....	10 m / s <sup>2</sup>

$$P_{\text{agua}} = V_{\text{tanque}} \times \rho_{\text{agua}} \times g$$

$$P_{\text{agua}} = (0.5) \cdot (1000) \cdot (10) = 5000 \text{ N} = 5 \text{ kN}$$

$$P_{\text{tanque}} = (12) \cdot (10) = 120 \text{ N} = 0.12 \text{ kN}$$

<i>P agua</i>	.....	5.00	kN
<i>P tanque</i>	.....	0.12	kN
<b>P total tanque</b>	.....	5.12	kN

Ahora se divide el valor de esta carga puntual entre el área de la losa y así de esta manera distribuir la carga por metro cuadrado:

<i>P total tanque</i>	.....	5.12	kN
<i>Area Placa</i>	( 1.1 x 3.5 )	3.85	m <sup>2</sup>
<b>W total tanque</b>	.....	1.33	kN / m <sup>2</sup>

### Peso propio Losa Maciza

Esta losa es de concreto reforzado ( $\rho_{\text{concreto}} = 2400 \text{ kg/m}^3$ ). Sus dimensiones son  $1.10 \times 3.50 \times 0.10 \text{ m}$ . Estas dimensiones son tomadas del plano en planta de la cubierta. El peso de la losa se distribuirá sobre su área.

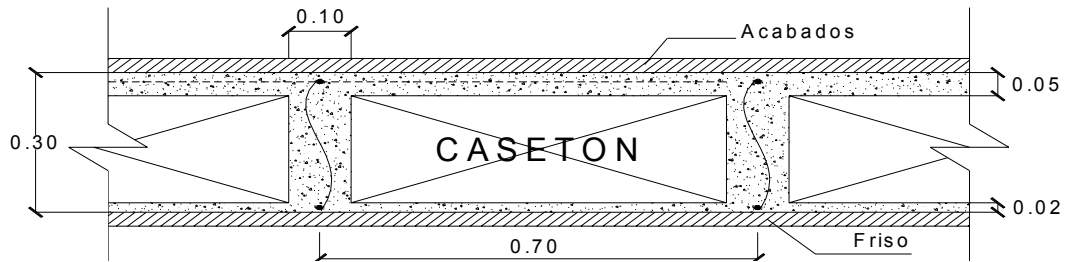
$$W_{\text{losa}} = \text{espesor} \times \rho_{\text{concreto}} \times g$$

$$W_{\text{losa}} = (2400) \cdot (10) \cdot (0.10) = 2400 \text{ N} = 2.4 \text{ kN/m}^2$$

De esta manera se obtendrá el valor de la carga distribuida total presente en la losa maciza, luego:

<i>W total tanque</i>	.....	1.33	kN / m <sup>2</sup>
<i>W placa</i>	.....	2.4	kN / m <sup>2</sup>
<b>W total placa</b>	.....	3.73	kN / m <sup>2</sup>

#### b. Sección entrepiso



El peso de la placa va a estar dado por la suma de los diferentes pesos de los elementos que la conforman.

$$W_{\text{torta superior}} = \text{espesor} \times \rho_{\text{concreto}} \times g$$

$$W_{\text{torta superior}} = (0.05) \cdot (2400) \cdot (10) = 1200 \text{ N/m}^2 = 1.2 \text{ kN/m}^2$$

$$W_{\text{vigüeta (nervio)}} = [\text{Area Transversal vigüeta} \times \rho_{\text{concreto}} \times g] / [\text{Distancia entre ejes}]$$

$$W_{\text{vigüeta (nervio)}} = [(0.23) \cdot (0.10) \cdot (2400) \cdot (10)] / (0.70) = 788.5 \text{ N} = 0.79 \text{ kN/m}^2$$

$$W_{\text{aligeramiento (casetón)}} = 0.25 \text{ kN/m}^2$$

$$W_{\text{acabados}} = 1.20 \text{ kN/m}^2$$

$$W_{\text{torta inferior}} = \text{espesor} \times \rho_{\text{concreto simple}} \times g$$

$$W_{\text{torta inferior}} = (0.02) \cdot (2300) \cdot (10) = 460 \text{ N/m}^2 = 0.46 \text{ kN/m}^2$$

$$W_{\text{friso inferior}} = \text{espesor} \times \rho_{\text{concreto simple}} \times g$$

$$W_{\text{friso inferior}} = (0.01) \cdot (2300) \cdot (10) = 230 \text{ N/m}^2 = 0.23 \text{ kN/m}^2$$

La carga muerta producida por muros divisorios y particiones de materiales tradicionales, **cuando éstos no hacen parte del sistema estructural**, debe evaluarse para cada piso y se puede utilizar como carga distribuida en las placas. Cuando no se realice un análisis detallado para calcular el peso de los muros, la NSR – 98 (B.3.4.2) da dos valores mínimos a utilizar dependiendo del tipo de ladrillo usado:

Muros de ladrillo bloque hueco de arcilla o concreto =  $3.0 \text{ kN/m}^2$

Muros de ladrillo macizo, tolete, de arcilla, concreto o silical =  $3.5 \text{ kN/m}^2$

Estos valores son considerados por metro cuadrado de placa y su cálculo está hecho considerando una altura libre de entrepiso de 2.20 m. Dado el caso de tener una mayor altura, el valor de la carga se obtendrá proporcionalmente.

Es importante mencionar que cuando un muro haga parte del sistema estructural su peso debe contabilizarse dentro del peso propio del elemento y se exige de tener que usar los valores mínimos dados.

En el presente ejercicio, los muros divisorios están elaborados con ladrillo hueco de concreto y la altura libre de entrepiso es de 2.50 m, luego:

$$W_{\text{muros}} \rightarrow 2.50 \text{ m}$$

$$3.0 \text{ kN/m}^2 \rightarrow 2.20 \text{ m}$$

Así, la carga por muros divisorios para una altura de 2.50 m. es:

$$W_{\text{muros divisorios}} = 3.41 \text{ kN / m}^2$$

A continuación se calcula la carga total por metro cuadrado de placa:

W torta superior .....	1.20	kN / m <sup>2</sup>
W vigueta (nervio) .....	0.79	kN / m <sup>2</sup>
W aligeramiento .....	0.25	kN / m <sup>2</sup>
W acabados .....	1.20	kN / m <sup>2</sup>
W torta inferior .....	0.46	kN / m <sup>2</sup>
W friso inferior .....	0.23	kN / m <sup>2</sup>
W muros divisorios .....	3.41	kN / m <sup>2</sup>
<b>W total entrepiso</b>	<b>7.54</b>	<b>kN / m<sup>2</sup></b>

### c. Escaleras

Uno de los elementos estructurales más frecuentes en las edificaciones son las escaleras de tipo de losa simplemente apoyada. Este tipo de escaleras se idealiza como una viga simplemente apoyada en sus extremos.

Para las escaleras es necesario definir 3 parámetros fundamentales: Huella, contrahuella y el espesor de la losa. La huella es la parte horizontal del escalón, es decir, sobre la que el pie se apoya, mientras que la contrahuella es la parte vertical del escalón.

En muchos proyectos de vivienda, las medidas de huella y contrahuella para la escalera ya están definidas en los planos arquitectónicos del proyecto. Dado el caso en que no se cuenten con estos valores, la NSR – 98 en el inciso **K.3.8.3.4** presenta algunos parámetros para el predimensionamiento de estos valores.

El espesor de la losa maciza de la escalera se puede determinar haciendo uso de del inciso C.9.5.2 de NSR – 98, el cual presenta una tabla de espesores mínimos en función de las condiciones de apoyo de la losa y de la longitud de la misma.

Espesor losa:

El espesor de la losa se determinara con la siguiente expresión:

$$e_{\text{losa}} = \text{Long. en planta escalera} / 20$$

La longitud de la escalera medida en planta es 3.50 m, luego:

$$e_{\text{losa}} = 3.50 / 20 = 0.18 \text{ m.}$$

Contrahuella:

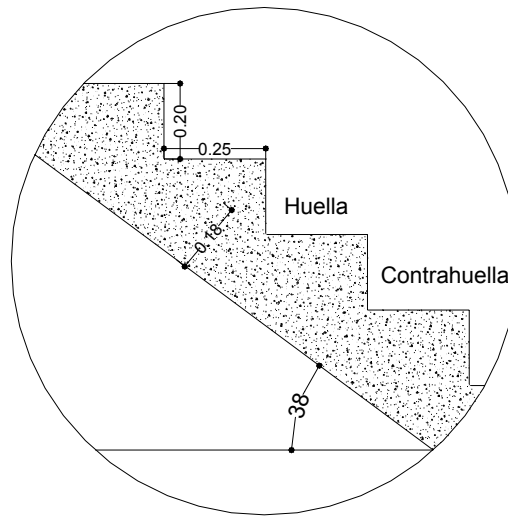
Como se puede observar en el plano en planta, el número de escalones que tendrá la escalera es de 14 (huella = 25 cm.). Además, la escalera debe unir el nivel + 0.0 con el nivel + 2.80 que es la cota del segundo piso.

Con estos datos se puede determinar el valor de la contrahuella como se muestra a continuación:

$$h_{\text{contrahuella}} = (\text{Altura libre entre placas} + \text{Altura placa}) / \text{Numero escalones}$$

$$h_{\text{contrahuella}} = (2.50 + 0.30) / 14 = 0.20 \text{ m.}$$

La pendiente con la que cuenta la escalera es:  $\theta = \tan^{-1} \left( \frac{0.20}{0.25} \right) \approx 38^\circ$



Una vez conocidas las dimensiones básicas de la escalera, se procede a calcular el valor de la carga muerta por metro cuadrado de escalera.

- Losa de concreto:

El valor de la carga de la losa por metro cuadrado se calcula para la proyección horizontal de la longitud de la escalera. Es decir, solo se tendrá en cuenta el valor de la carga vertical actuante sobre la losa. Para esto se divide el valor de la carga por metro cuadrado por el coseno del ángulo que forma la escalera con la horizontal ( $38^\circ$ ).

$$W_{\text{losa}} = \text{espesor} \times \rho_{\text{concreto}} \times g / \cos \theta$$

$$W_{\text{losa}} = (0.18) \cdot (2400) \cdot (10) / \cos(38) = 5482 \text{ N/m}^2 = 5.48 \text{ kN/m}^2$$

La losa también presenta un friso de 2 mm. en la parte inferior. Para este friso se usa un mortero simple ( $\rho_{\text{Mortero}} = 2200 \text{ kg/m}^3$ ).

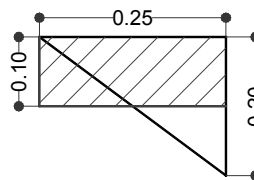
$$W_{\text{mortero}} = \text{espesor} \times \rho_{\text{concreto}} \times g / \cos \theta$$

$$W_{\text{mortero}} = (0.02) \cdot (2200) \cdot (10) / \cos(38) = 558 \text{ N/m}^2 = 0.56 \text{ kN/m}^2$$



- Peldaños:

Una de las tantas formas para analizar los peldaños de las escaleras se muestra a continuación. Para este análisis se transforma la sección transversal triangular del escalón por una rectangular que tenga la misma área y la misma distancia de huella, luego el valor de la altura de este rectángulo es 0.10 m como se muestra a continuación:



$$W_{\text{peldaños}} = \text{espesor} \times \rho_{\text{concreto}} \times g$$

$$W_{\text{peldaños}} = (0.10) \cdot (2400) \cdot (10) = 2400 \text{ N/m}^2 = 2.40 \text{ kN/m}^2$$

$$W_{\text{acabados peldaños}} = 1.50 \text{ kN/m}^2$$

La carga total por metro cuadrado de escalera es:

W losa	.....	5.48	kN / m <sup>2</sup>
W mortero	.....	0.56	kN / m <sup>2</sup>
W peldaño	.....	2.40	kN / m <sup>2</sup>
W acabados	.....	1.50	kN / m <sup>2</sup>
<b>W total escalera</b>		<b>9.94</b>	<b>kN / m<sup>2</sup></b>

### 2.1.2 Cargas Vivas (Capítulo B.4 NSR - 98)

Como se menciono al inicio del presente capítulo, las cargas vivas son aquellas cargas que se deben al uso y a la operación de la estructura. Incluye, todo aquello que no

incluye una posición fija y definitiva en la estructura. Entre estas se puede considerar el peso y las carga debidas a los muebles, mercancías, equipos y personas.

La NSR – 98 en su capitulo B.4 ( B.4.2.1) presenta los valores mínimos de cargas vivas a considerar para el análisis de las estructura.

Para la vivienda analizada, se encontraron los siguientes valores de cargas vivas mínimas:

**a. Techo**

- Cubierta:

La NSR – 98 presenta un valor de carga viva para la cubierta en función de su pendiente, como se muestra a continuación (B.4.2.1):

Cubiertas inclinadas de estructuras metálicas y de madera con imposibilidad física de verse sometidas a cargas superiores a la acá estipulada:

- si la pendiente es mayor del 20%.....0.35 kN / m<sup>2</sup> (35 kgf / m<sup>2</sup>)
- si la pendiente es menor del 20%..... 0.50 kN / m<sup>2</sup> (50 kgf / m<sup>2</sup>)

En el presente ejercicio la cubierta presenta una pendiente del 24%, luego la carga viva para esta cubierta es de:

$$W_{\text{cubierta}} = 0.35 \text{ kN / m}^2$$

- Losa maciza:

Esta losa tendrá una carga viva de:  $W_{\text{losa}} = 0.40 \text{ kN / m}^2$  . Esta carga se presentara cuando alguien le haga limpieza al tanque del agua.

### **b. Entrepiso**

Según la NSR – 98 inciso B.4.2.1, el valor de la carga viva para viviendas es de:

$$W_{\text{entrepiso}} = 1.8 \text{ kN/m}^2$$

### **c. Escaleras**

Según la NSR – 98 inciso B.4.2.1, el valor de la carga viva para escaleras es de:

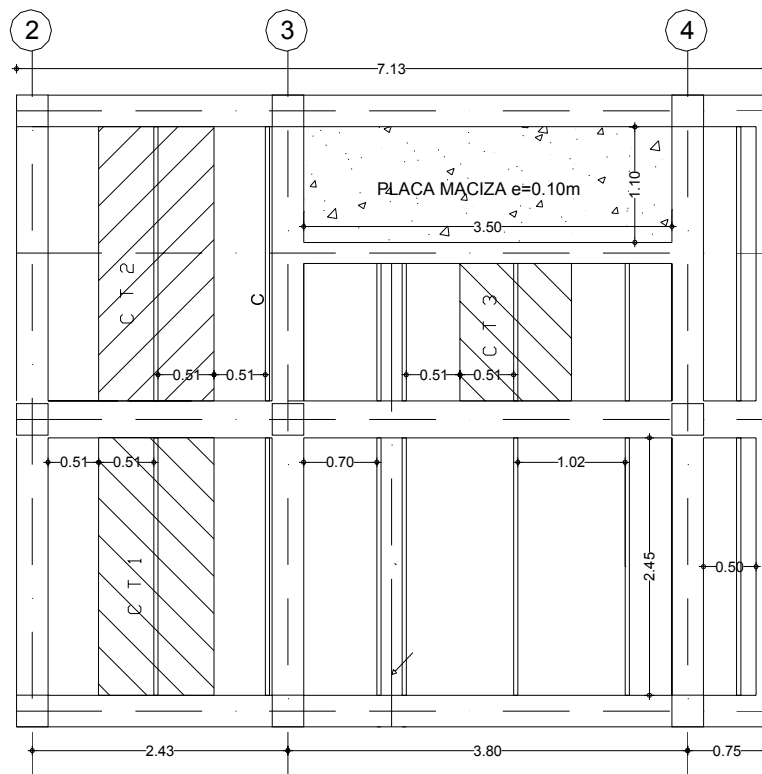
$$W_{\text{escalera}} = 3.0 \text{ kN/m}^2$$

## **2.2 Cargas para elementos transmisores**

Como se puede observar en los planos en planta de los diferentes niveles, tanto los listones de madera de la cubierta, las viguetas del entrepiso, como la escalera son los elementos encargados de transmitir las cargas a los diferentes pórticos de la estructura. Es por esto que es necesario cargar cada uno de estos elementos. Esto se hará haciendo uso del método de las áreas aferentes, obteniendo de esta manera la carga distribuida linealmente sobre cada elemento.

- **Listones de Madera**

A continuación se muestra el plano estructural de la cubierta y en el se señala el área aferente para los listones:



Como la carga se debe distribuir a lo largo de cada listón, simplemente hay que multiplicar el valor de la carga calculada por metro cuadrado de cubierta por el ancho aferente de cada área achurada en el plano. Si se observa, el valor del ancho aferente para todos los listones es de 1.02 m. Así el valor de la carga por metro lineal para cada listón es:

Carga Muerta:

$$W_{\text{muerta listón}} = \text{Carga Muerta por m}^2 \text{ de cubierta} \times \text{Ancho aferente}$$

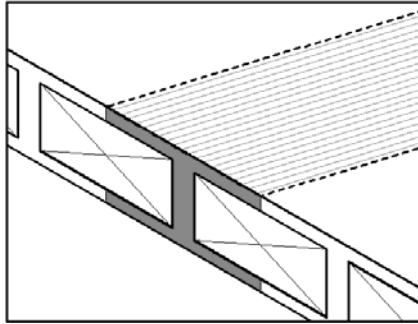
$$W_{\text{muerta listón}} = (1.10 \text{ kN/m}^2) \cdot (1.02 \text{ m}) = 1.12 \text{ kN/m}$$

Carga Viva:

$$W_{\text{viva listón}} = \text{Carga Viva por m}^2 \text{ de cubierta} \times \text{Ancho aferente}$$

$$W_{\text{viva listón}} = (0.35 \text{ kN/m}^2) \cdot (1.02 \text{ m}) = 0.36 \text{ kN/m}$$

- **Vigueta de entrepiso**



En el caso de las viguetas, el ancho aferente para cada una de ellas es de 0.70 m como se puede observar en el plano en planta (distancia entre ejes). El calculo se hace de la misma forma como se hizo en el caso anterior. Adicionalmente al valor de la carga distribuida por metro lineal, en las viguetas se considera un momento en los extremos de las mismas. Esto se debe a que a que las viguetas se encuentran embebidas en las vigas.

Un valor aproximado para estos momentos se puede obtener mediante la expresión:

$$(W \cdot L^2) / 24$$

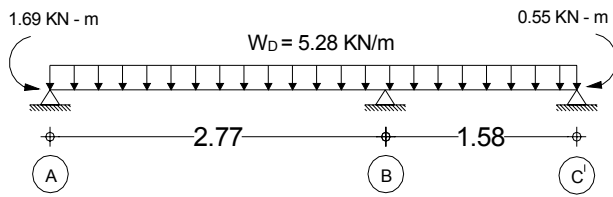
Carga Muerta:

$$W_{\text{muerta vigueta}} = \text{Carga Muerta por m}^2 \text{ de entrepiso} \times \text{Ancho aferente}$$

$$W_{\text{muerta vigueta}} = (7.54 \text{ kN/m}^2) \cdot (0.70 \text{ m}) = 5.28 \text{ kN/m}$$

La carga distribuida será la misma para todas las viguetas, pero los momentos de empotramiento varían para cada una, ya que son función de las luces de la vigueta.

Para el caso de la vigueta tipo 1 se tiene:



$$M_{\text{muerta}} \text{ extremo A} = (5.28) \cdot (2.77^2) / 24 = 1.69 \text{ kN} - \text{m}$$

$$M_{\text{muerta}} \text{ extremo C'} = (5.28) \cdot (1.58^2) / 24 = 0.55 \text{ kN} - \text{m}$$

de igual manera se hace para las demás viguetas.

Carga Viva:

$$W_{\text{viva}} \text{ vigueta} = \text{Carga Viva por m}^2 \text{ de entrepiso} \times \text{Ancho aferente}$$

$$W_{\text{viva}} \text{ vigueta} = (1.8 \text{ kN/m}^2) \cdot (0.70 \text{ m}) = 1.26 \text{ kN/m}$$

para cada una de las viguetas se determinan los valores de los momentos en los extremos por carga viva.

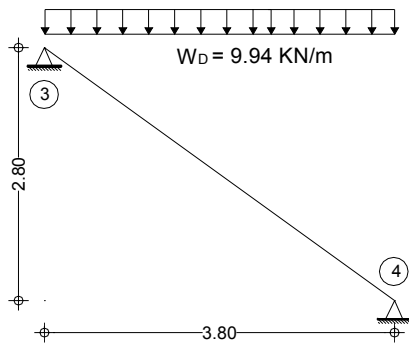
- **Escalera**

Para cargar la escalera, se toma una franja de un metro de ancho de escalera siendo este el ancho aferente a considerar.

Carga Muerta:

$$W_{\text{muerta}} \text{ escalera} = \text{Carga Muerta por m}^2 \text{ de escalera} \times \text{Ancho aferente}$$

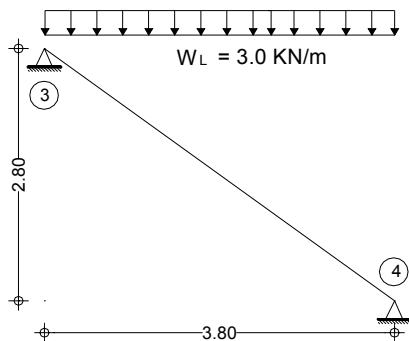
$$W_{\text{muerta}} \text{ escalera} = (9.94 \text{ kN/m}^2) \cdot (1.0 \text{ m}) = 9.94 \text{ kN/m}$$



Carga Viva:

**W viva** listón = Carga Viva por  $\text{m}^2$  de escalera  $\times$  Ancho aferente

**W viva** listón tipo 1 =  $(3 \text{ kN/m}^2) \cdot (1 \text{ m}) = 3 \text{ kN/m}$



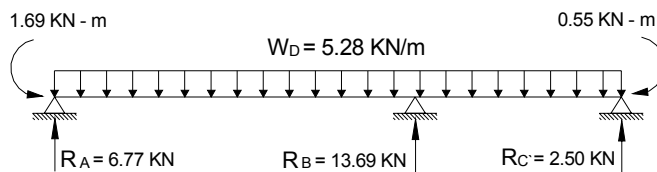
Una vez cargado cada uno de los elementos transmisores de carga, se procede a determinar el valor sus reacciones. De esta forma se obtiene una serie de cargas puntuales que recaen sobre las vigas de los diferentes pórticos.

**Calculo de reacciones de elementos transmisores:**

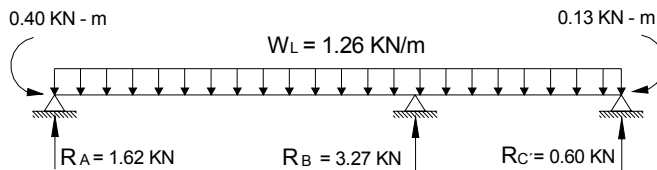
Como ejemplo se calculara el valor de las reacciones para la vigueta tipo 1 tanto para la carga muerta, como para la carga viva.

La sección transversal de la vigueta es de 0.10 m x 0.30m. Resolviendo la vigueta por cualquiera de los métodos vistos en estructuras ( Slope deflection, Cross, Kani, etc) o haciendo uso de algunos de los software para análisis estructural ( Sap, Etabs, etc) se obtienen los siguientes valores para las reacciones:

### Carga muerta



### Carga Viva



el mismo procedimiento se realiza para cada uno de los elementos transmisores de carga.

## 2.3 Transmisión de cargas a los elementos estructurales

Una vez conocidas todas las reacciones de todas las viguetas, los listones y de la escalera, tanto para la carga muerta como para la carga viva, se procede a cargar los diferentes pórticos de la estructura. Es importante definir muy bien la nomenclatura de los ejes de los elementos transmisores de carga, para así evitar posibles confusiones a la hora de cargar los pórticos.



Además de considerarse las cargas transmitidas a los pórticos, también se debe tener en cuenta el peso propio de la estructura aporticada.

La carga del peso propio por metro de longitud de viga se determina de la siguiente manera:

$$W_{\text{viga}} = [\text{Area Transversal viga} \times \rho_{\text{concreto}} \times g]$$

$$W_{\text{viga}} = (0.30) \cdot (0.30) \cdot (2400) \cdot (10) = 2160 \text{ N/m} = 2.16 \text{ kN/m}$$

Nótese que todas las vigas tienen sección de 0.3 m x 0.3 m excepto la del eje B, que es de 0.3 x 0.35 m. Para esta viga la carga será igual a:

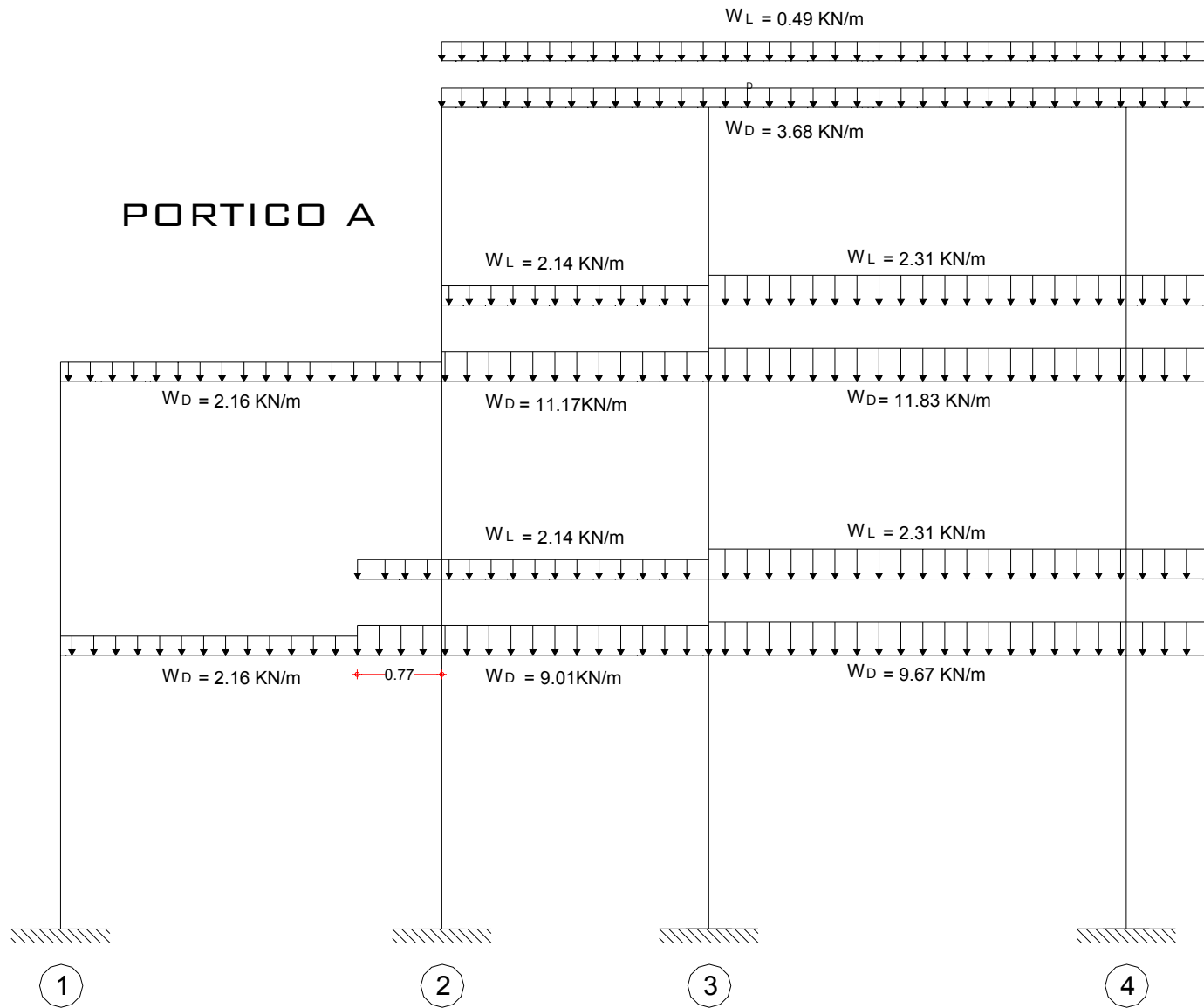
$$W_{\text{viga eje B}} = (0.30) \cdot (0.35) \cdot (2400) \cdot (10) = 2520 \text{ N/m} = 2.52 \text{ kN/m}$$

Importante:

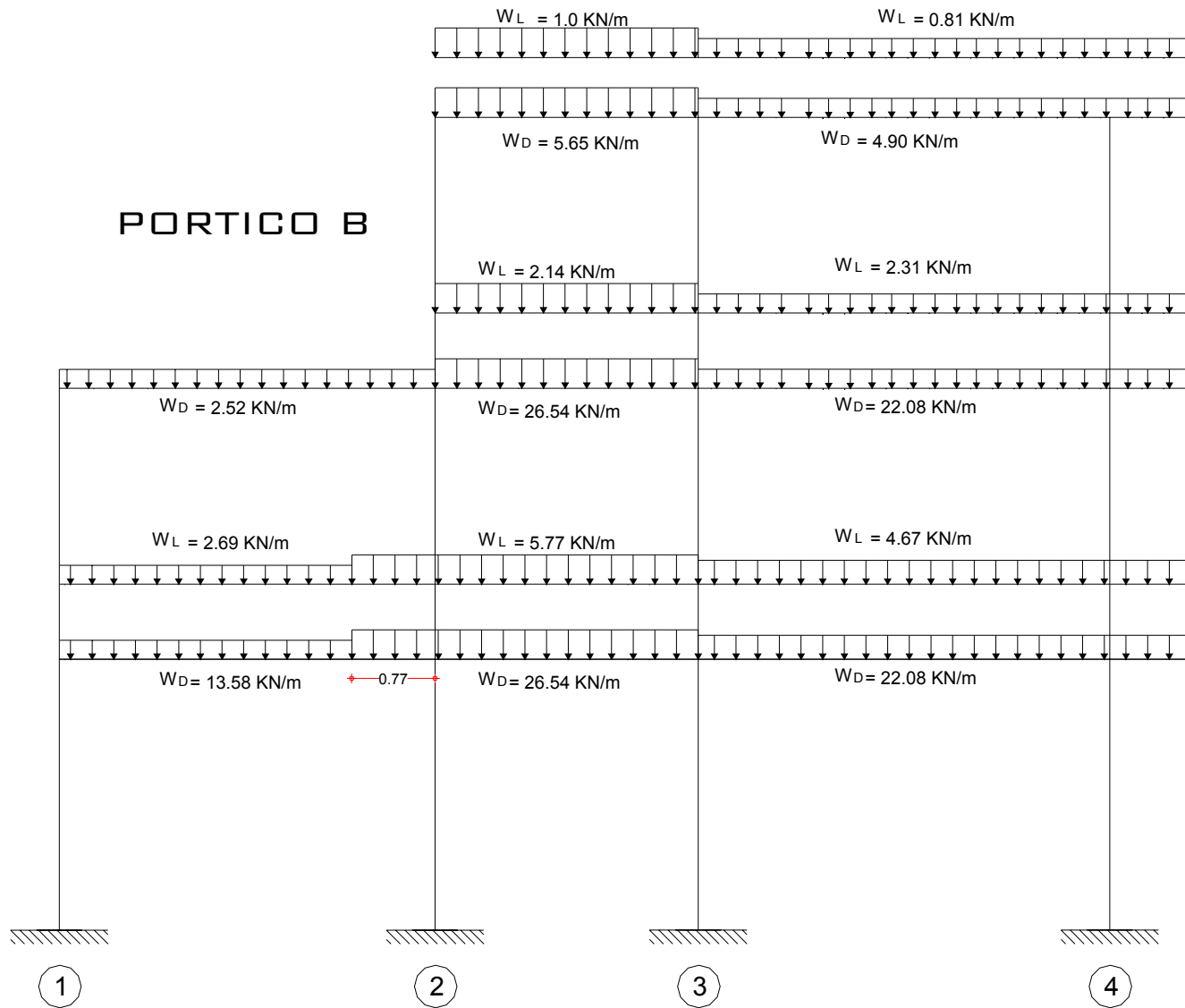
Las viguetas se encuentran espaciadas cada 0.70 m, luego se tendrá el mismo valor de reacción cada 0.7 m sobre las vigas del pórtico en que se apoyan. Para convertir esta carga a una carga distribuida por metro de longitud, solo hay que dividir el valor de la reacción de la vigueta sobre la separación entre viguetas.

A continuación se muestran los diferentes pórticos cargados:

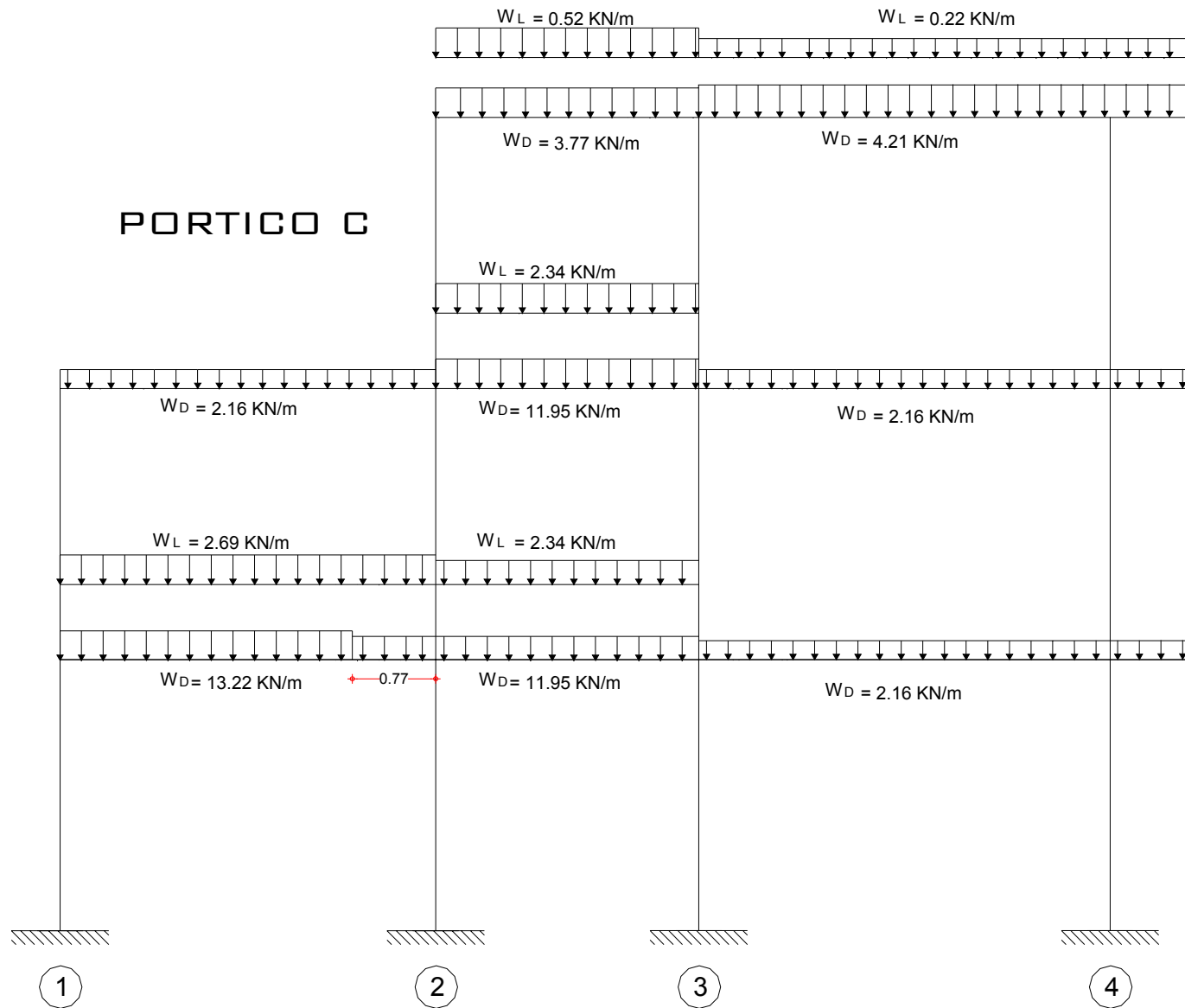
# Pórtico A



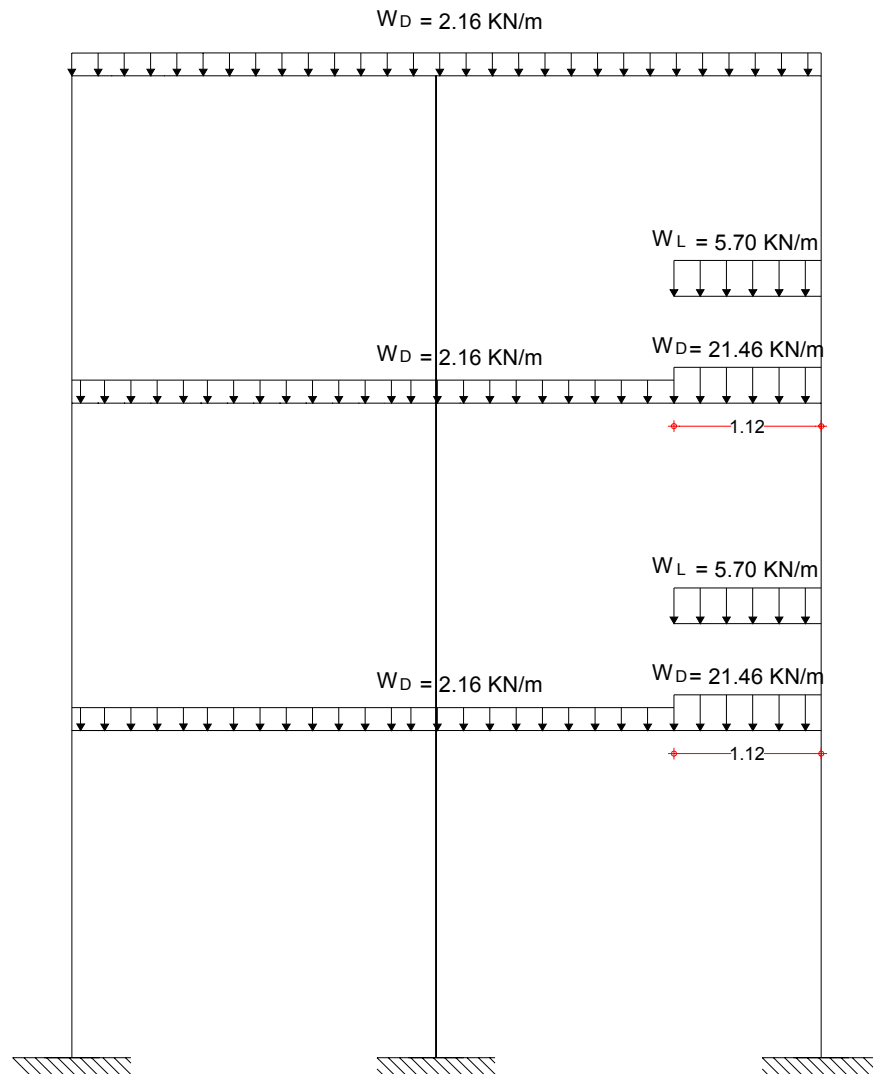
# Pórtico B



# Pórtico C



### Pórtico 3.

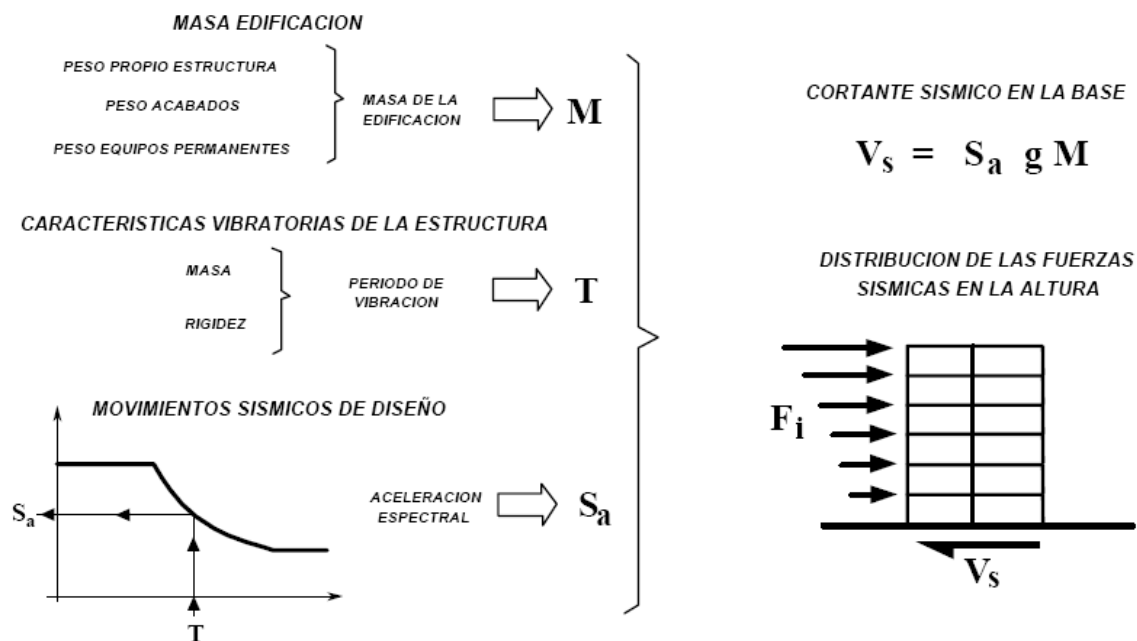


Los demás pórticos se cargan de la misma manera como se ha hecho con los anteriormente cargados. Cabe mencionar que sobre estos otros pórticos las cargas serán pequeñas, ya que sobre estos no se apoya ningún elemento transmisor.

## 2.4 Cálculo de la fuerza de Sismo

Las fuerzas sísmicas actuantes sobre la edificación en este ejercicio se calcula por medio del Método de la fuerza horizontal equivalente numeral A.4 de la NSR-98. Este método se trata con mayor profundidad en la asignatura “Dinámica Estructural”.

El siguiente esquema tomado del título A figura 10 de la NSR – 98, se presenta un resumen de los pasos a seguir para determinar las fuerzas sísmicas actuantes sobre la estructura por el método de la fuerza horizontal equivalente.



Los parámetros necesarios para desarrollar el método de la fuerza horizontal equivalente son:

- Localización geográfica:

La vivienda se encuentra ubicada en la ciudad de Bucaramanga.

- Riesgo sísmico:

De acuerdo con el mapa de la figura A.2.1 del capítulo A.2 de la NSR-98, la ciudad de Bucaramanga se encuentra en una zona de riesgo sísmico alto.

- Coeficiente de aceleración pico efectivo para diseño.

Por medio del mapa A.2.2 del capítulo A.2 de la NSR-98, se determina el valor del coeficiente de  $A_a$ . Para este ejemplo se tiene:

$$A_a = 0.25$$

- Efectos locales.

Como se mencionó al inicio del ejercicio, el suelo que soporta la edificación es un suelo S2 de acuerdo al artículo A.2.4.2 de la NSR-98. En la tabla A.2-3 se encuentra el valor del coeficiente de sitio  $S$  para este tipo de suelo

$$S = 1.2.$$

- Grupo de uso

La edificación pertenece al grupo de uso I (estructuras de ocupación normal) según el artículo A.2.5.1 de la NSR-98.

- Coeficiente de importancia

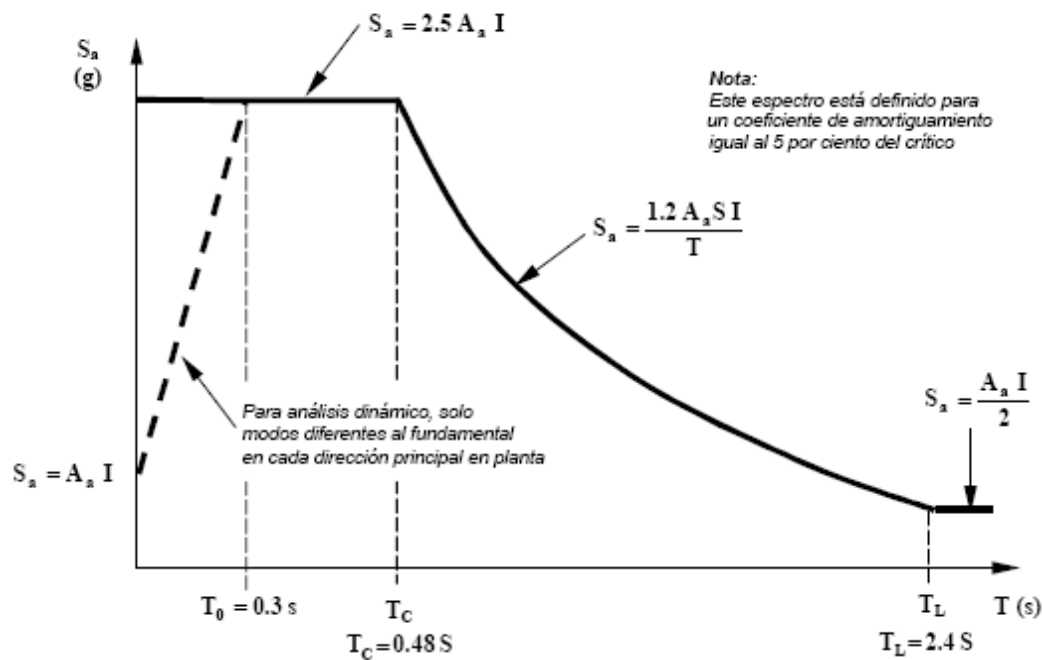
De acuerdo con el grupo de uso se determinara el coeficiente de importancia (artículo A.2.5.2). En la tabla A.2-4 se encuentra el valor del coeficiente de importancia I, que para esta vivienda es:

$$I = 1.0.$$

- Espectro de Diseño

Una vez conocidos los anteriores parámetros, se puede determinar el espectro de diseño (A.2.6 - NSR 98) para la estructura:

**Figura 54:** Espectro de Diseño



- Periodos  $T_0$ ,  $T_c$  y  $T_L$

$$T_0 = 0.30 \text{ segundos}$$

$$T_c = 0.48 \text{ S} = 0.48 (1.20) = 0.576 \text{ segundos}$$

$$T_L = 2.4 \text{ S} = 2.4 (1.20) = 2.88 \text{ segundos}$$



- Espectro elástico de aceleraciones:

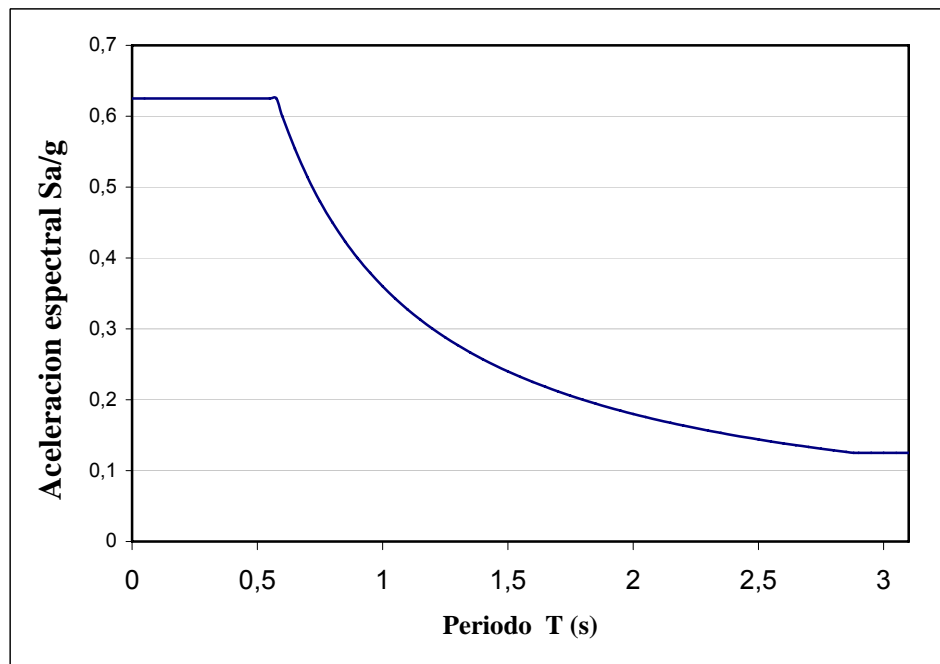
El espectro esta definido en la sección A.2.6 de la NSR-98 así:

$$S_a = 2.5 \cdot A_a \cdot I \quad T < T_C$$

$$S_a = \frac{1.2 A_a S I}{T} \quad T_C < T < T_L$$

$$S_a = \frac{A_a I}{2} \quad T > T_L$$

Para la edificación del ejercicio se tiene el siguiente espectro:



- **Calculo del Fuerza Horizontal en la base de la estructura**

El método habla de cortante sísmico en la base como la totalidad de los efectos inerciales horizontales producidos por los movimientos sísmicos de diseño. El valor del cortante Vasal se obtiene por medio de la siguiente ecuación:

$$V_s = S_a g M$$

En donde:

$V_s$ : Fuerza horizontal en la base de la estructura.

$g$  : Gravedad

$M$  = Masa de la edificación.

El valor de  $S_a$  en la ecuación anterior corresponde al valor de la aceleración, como fracción de la gravedad, leída en el espectro de diseño de la edificación realizado anteriormente. Para obtener el valor de  $S_a$  es necesario conocer el valor del período  $T$  de la edificación.

El valor de  $T$  puede ser igual al período fundamental aproximado,  $T_a$ , que se obtenga por medio de la ecuación A.4-2.de la NSR-98:

$$T_a = C_t \cdot h_n^{3/4}$$

Donde  $C_t$  toma el valor de **0.08** para pórticos resistentes a momentos en concreto estructural y  $h_n$  es el valor de la altura de la edificación, que en este caso es de 8.4 m. Así:

$$T_a = 0.08 \cdot 8.4^{3/4} = 0.39 \text{ segundos}$$

Como se observa el periodo de la estructura esta comprendido entre 0.3s y 0.576 seg.  
El valor de  $S_a$  para esta zona es de:

$$S_a = 2.5 \cdot 0.25 \cdot 1 = 0.625$$

Retomando la ecuación del cortante Vasal ( $V_s = S_a \cdot g \cdot M$ ), se puede ver que solo hace falta determinar el valor de la masa para la edificación.

Ahora necesitamos la masa de la estructura y su masa por nivel, de esta forma procedemos a la evaluación de masas:

### **Masa de la edificación:**

#### **Entreplaca:**

Para el cálculo de masa total de entreplaca para cada piso se tiene en cuenta la sustracción del área de las vigas, área de vacíos y área de columnas. Midiendo en los planos en planta los valores de las áreas de entrepiso se tiene:

Nivel +2.80m

$$A_{\text{entrepiso Nivel} + 2.8} = 32.59 \text{ m}^2$$

Como ya fueron evaluadas las cargas por metro cuadrado de placa, simplemente se multiplica la carga de la placa por el área de placa del nivel y luego este valor se convierte a Kg.

$$M_{\text{entrepiso Nivel} + 2.8} = \left(7.54 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2}\right) \cdot (32.59 \text{ m}^2) \cdot \left(\frac{1 \text{ Kg}}{0.01 \text{ KN}}\right) = 24572.86 \text{ Kg}$$

Nivel +5.60 m

$$M_{\text{entrepiso Nivel + 5.8}} = \left(7.54 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2}\right) \cdot (22.70 \text{ m}^2) \cdot \left(\frac{1 \text{ Kg}}{0.01 \text{ KN}}\right) = 17115.8 \text{ Kg}$$

### **Vigas:**

La sección transversal de las vigas de la edificación es de 0.30 x 0.30 m, excepto para las vigas del eje B cuya sección es de 0.30 x 0.35 m.

Longitud en planta vigas (0.30x0.30) = 44.3 m

$$\text{Volumen} = (0.3 \times 0.3 \times 44.3) = 3.99 \text{ m}^3$$

Longitud en planta vigas (0.30x0.35) = 10.75 m.

$$\text{Volumen} = (0.3 \times 0.35 \times 10.75) = 1.13 \text{ m}^3$$

$$\text{Volumen total vigas entrepiso} = 5.12 \text{ m}^3$$

Nivel + 2.80

$$M_{\text{entrepiso Nivel + 2.6}} = (5.12 \text{ m}^3) \cdot \left(2400 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}\right) = 12288 \text{ Kg}$$

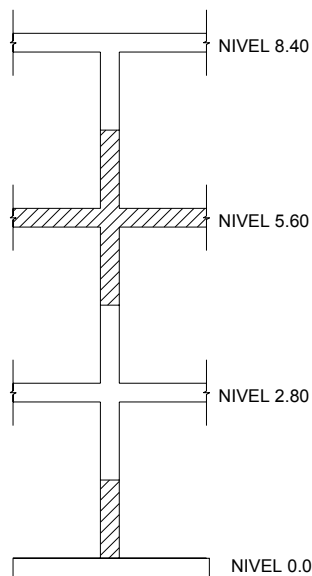
Nivel + 5.60

$$M_{\text{entrepiso Nivel + 5.6}} = (5.12 \text{ m}^3) \cdot \left(2400 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}\right) = 12288 \text{ Kg}$$

Nivel + 8.40

$$M_{\text{entrepiso Nivel + 8.4}} = (1.99 \text{ m}^3) \cdot \left(2400 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}\right) = 4776 \text{ Kg}$$

### Columnas:



La masa de las columnas se calcula como la masa existente entre la mitad de la altura libre del piso inferior mas la mitad de la altura libre del piso en cuestión. De esta manera se tiene:

Para el nivel +2.80 m - + 5.60 m:

$$M = (h \text{ media piso inferior} + h \text{ media piso superior} + h \text{ entrepiso}) \times (\text{numero de columnas}) \\ \times (\text{seccion columna}) \times (\text{densidad Concreto reforzado})$$

$$M_{\text{columnas} + 2.8 - 5.6} = (1.25\text{m} + 1.25\text{m} + 0.3\text{m}) \cdot 12 \cdot 0.09\text{m}^2 \cdot 2400 \text{ Kg./m}^3 = 7258 \text{ Kg.}$$

Para el nivel +8.4 m:

$$M_{\text{columnas} + 2.8 - 5.6} = (1.25\text{m} + 0.3\text{m}) \cdot 9 \cdot 0.09\text{m}^2 \cdot 2400 \text{ Kg./m}^3 = 3013.2 \text{ Kg.}$$

### **Escaleras:**

La carga por metro cuadrado de escalera es de  $9.94 \text{ kN} / \text{m}^2$ . Multiplicando este valor por el área en planta que ocupa la escalera se obtiene:

$$M_{\text{escalera entrepiso 1 y 2}} = 9.94 \text{ kN} / \text{m}^2 \cdot (1.10 \times 3.50) \text{ m}^2 \cdot \frac{1 \text{ kg}}{0.01 \text{ kN}} = 3827 \text{ Kg}$$

Escalera Nivel 0.0 – 2.8:

La mitad de la masa de esta escalera se asigna al entrepiso nivel 2.8, es decir 1913.5 kg.

Escalera Nivel 2.8 – 5.6:

La masa se distribuye de la misma manera. Para el entrepiso nivel 2.8 se asigna una masa de 1913.5 kg y para el entrepiso nivel 5.6 se asigna una masa de 1913.5 kg

### **Cubierta:**

En este nivel se encuentra la estructura de cubierta como el tanque de agua. Estos valores se calcularon al inicio del ejercicio y están distribuidos por metro cuadrado, así que solo se multiplican estos valores por el área correspondiente:

Tejas:

$$M_{\text{tejas y entramado}} = 1.10 \text{ kN} / \text{m}^2 \cdot (36 \text{ m}^2) \cdot \frac{1 \text{ kg}}{0.01 \text{ kN}} = 3960 \text{ Kg}$$

Placa maciza:

$$M_{\text{losa maciza y tanque}} = 3.73 \text{ kN} / \text{m}^2 \cdot (3.5 \cdot 1.1 \text{ m}^2) \cdot \frac{1 \text{ kg}}{0.01 \text{ kN}} = 1436.05 \text{ Kg}$$

En el siguiente cuadro se presentan las masas de cada uno los niveles de la estructura, así como la masa total de la edificación.

Masa Edificio (Kg.)			
Elemento	Nivel 2 (+ 2,8 )	Nivel 3 (+ 5,6 )	Cubierta (+ 8,6 )
Placa	24572,86	17115,8	0
Vigas	12288	12288	4776
Columnas	7258	7258	3013,2
Escalera	3827	1913,5	0
Tejas y entramado	0	0	3960
Losa Maciza	0	0	1436,05
<b>Masa Nivel (kg.)</b>	<b>47945,86</b>	<b>38575,3</b>	<b>13185,25</b>

<b>Masa Total Edificacion (kg.)</b>	<b>99706,41</b>
-------------------------------------	-----------------

Así el cortante basal ( $V_s$ ) o fuerza horizontal sísmica acumulada en la base de la estructura será:

$$V_s = S_a \cdot g \cdot M$$

$$V_s = 0.625 \cdot (10 \text{ m/s}^2) \cdot (99706.41 \text{ Kg}) = 623165.06 \text{ N} = 623.17 \text{ kN}$$

La fuerza sísmica horizontal,  $F_x$ , en cualquier nivel  $x$ , para la dirección en estudio, debe determinarse usando la siguiente ecuación:

$$F_x = C_{vx} \cdot V_s$$

en donde:

$$C_{vx} = \frac{m_x \cdot h_x^k}{\sum_{i=n}^n (m_i \cdot h_i^k)}$$

Donde  $k$  es un exponente relacionado con el período fundamental,  $T$ , de la edificación, para  $T$  menor o igual a **0.5** segundos,  $k = 1.0$ .

En el siguiente cuadro se muestran el cálculo correspondiente a las fuerzas sísmicas para cada nivel.

Nivel	$m_i$	$h_i^k$	$m_i \times h_i^k$	$C_{vx}$	$F_x$
Cubierta	13185,25	2,65	34940,9125	0,05	33,98
Nivel 3	38575,30	5,45	210235,385	0,33	204,47
Nivel 2	47945,86	8,25	395553,345	0,62	384,71
<b>Total</b>	99706,41		640729,64		623,17
<b>V s</b>	623,17				

Obteniendo de esta manera las fuerzas que actuaran sobre cada nivel de la edificación. Es importante mencionar que esta carga  $F_x$  se aplica para calcular las derivas sufridas por el sistema pórtico, pero no se usan para hacer el diseño de los elementos estructurales.

Estas fuerzas calculadas actuaran sobre la placa de cada nivel. Su punto de aplicación exacto se determina a partir de las condiciones de equilibrio de la estructura. Este tema de profundizara en la asignatura de Dinámica estructural y Armado II.

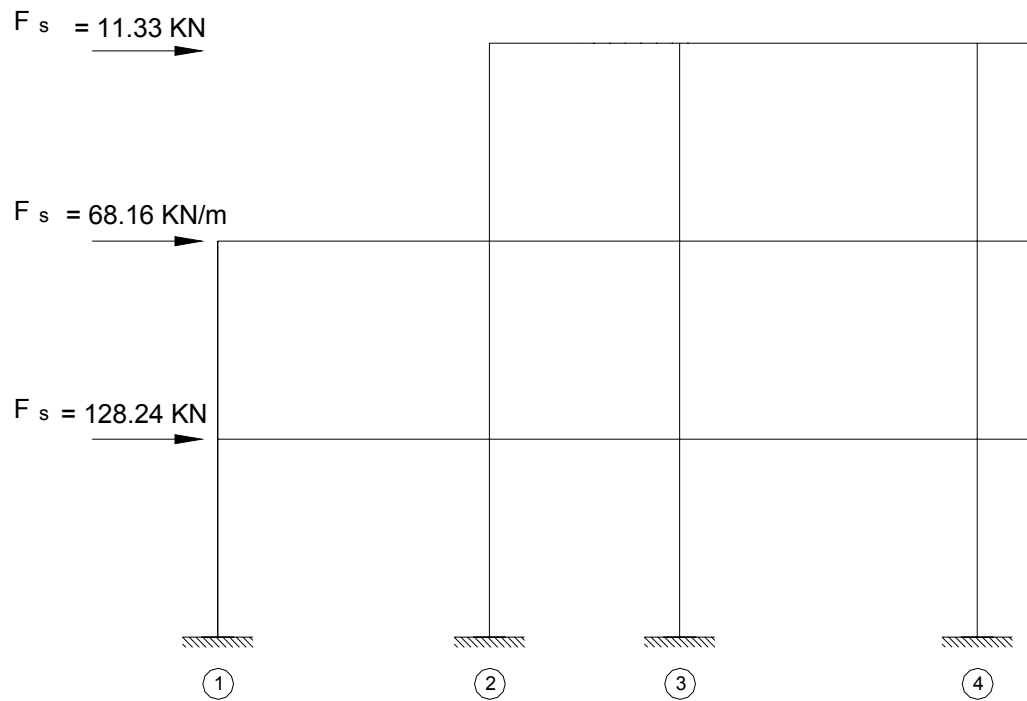
- **Distribución de las fuerzas sísmicas entre los pórticos resistentes de la edificación.**

Como se menciona anteriormente, la fuerza sísmica calculada para cada nivel se encuentra aplicada sobre la placa. Esta fuerza se puede distribuir sobre cada uno de los pórticos resistentes en la dirección analizada en proporción a su rigidez. Esto se puede hacer bajo el supuesto de que la losa es infinitamente rígida, luego la deformación horizontal de todos los pórticos en la dirección analizada es igual.

Para este ejemplo se analizara la resistencia sísmica en el sentido **Y**, se asumirá que los tres pórticos presentes en este sentido (Pórtico A – B – C) tienen las mismas dimensiones, luego sus rigideces van a ser iguales ( $K_{\text{portico A}} = K_{\text{portico B}} = K_{\text{portico C}}$ ).



Bajo estas consideraciones la carga actuante en cada nivel de cada uno de los pórticos será la tercera parte de fuerza sísmica calculada para cada nivel. Así para el caso del pórtico B se tiene:



### 3 Combinaciones de Carga

Al inicio del presente capítulo se mencionaron las combinaciones de carga usadas para el análisis de estructuras de concreto. Para este ejercicio académico se trabajara solo con las siguientes combinaciones:

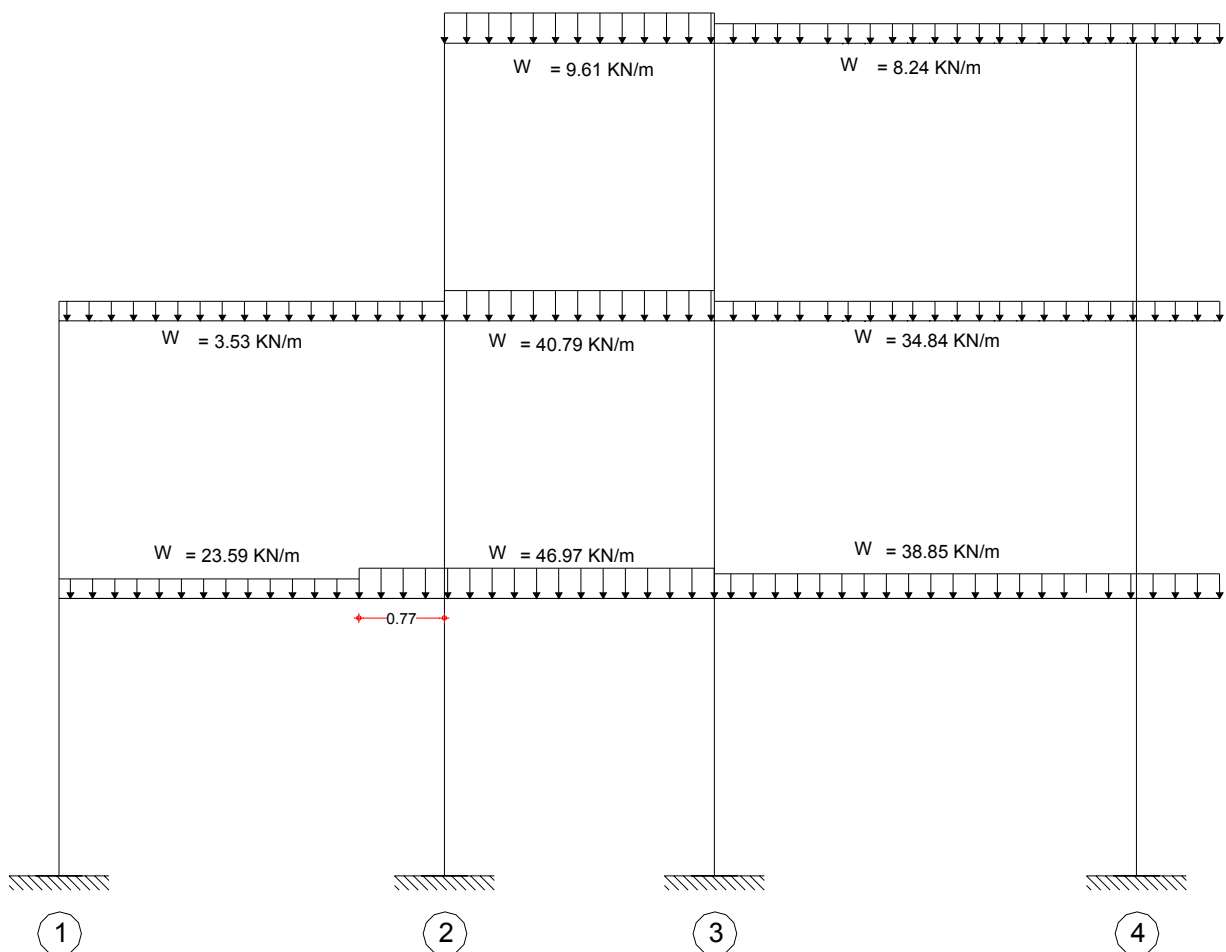
- $1.4D + 1.7L$
- $1.05D + 1.28L + 1.0 F_s$
- $0.9D + 1.0 F_s$

Como ejemplo se analizara el pórtico B de la estructura. Para este pórtico ya están determinadas las cargas muertas, vivas y la fuerza de sismo. A continuación se procede a aplicar cada una de las combinaciones mencionadas al pórtico.

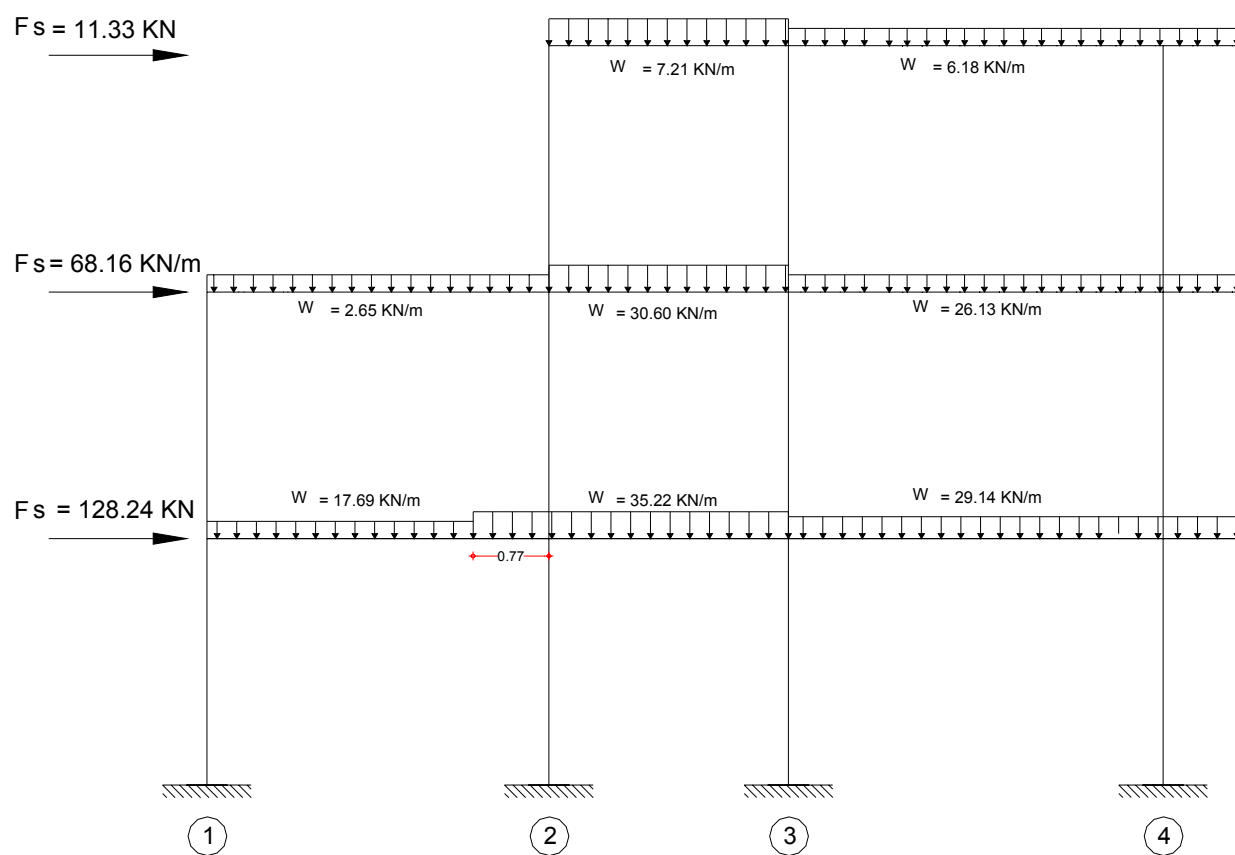
#### 4. Análisis de la estructura

El análisis de este pórtico se puede realizar haciendo uso del método de Kani (visto en el presente texto) o por medio de algún software como lo es el Sap 2000.

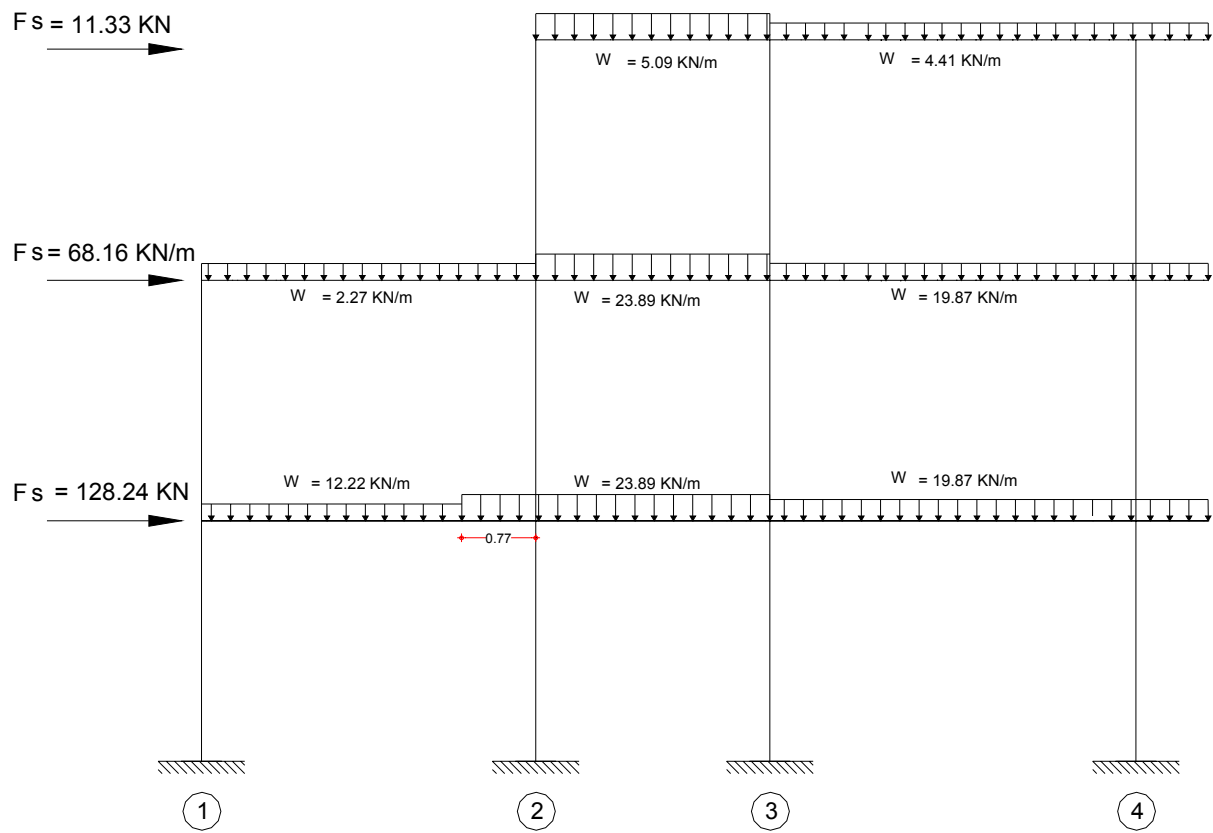
##### Combinación: 1.4 D + 1.7 L



**Combinación: 1.05 D + 1.28 L + 1.0 F<sub>s</sub>**



**Combinación: 0.9 D + 1.0 F<sub>s</sub>**



# **ANEXO**

**ANEXO 1**  
**ANÁLISIS DEL SISTEMA DUAL**

## **1. ANEXOS**

### **ANÁLISIS DEL SISTEMA DUAL**

#### **1.1 ASPECTOS GENERALES**

El sistema estructural dual es aquel que representa la solución óptima de resistencia tanto a cargas verticales como horizontales simultáneamente. A esta solución ideal sólo puede llegarse en zonas de riesgo sísmico moderado y en edificios de poca altura. Al incrementarse la altura del edificio las cargas horizontales y laterales toman gran importancia y las modificaciones que hay necesidad de hacerle a la estructura ideal para resistirlas son considerables. El problema puede plantearse como un sobre costo que hay necesidad de pagar para resistir las cargas horizontales y este sobre costo aumenta con el número de pisos hasta llegar a constituirse en el factor dominante en la selección del sistema estructural adecuado.

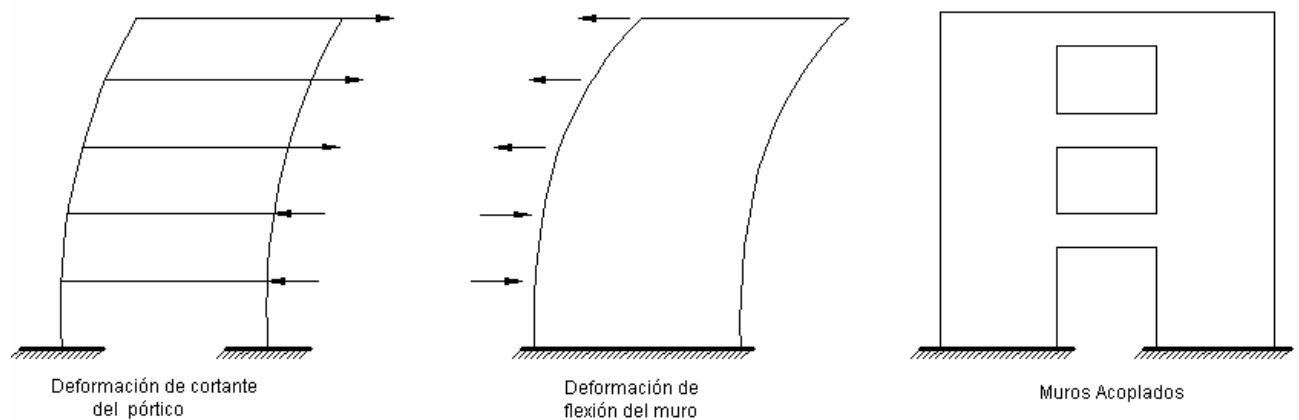
Las estructuras aporticadas trabajan esencialmente por flexión de sus elementos, esto las hace poco rígidas, especialmente para luces grandes como requieren los edificios para oficinas. Lo anterior hace que los sistemas aporticados no sean eficientes para edificios altos.

A medida que aumenta la altura de un edificio es mayor el incremento en las dimensiones tanto en las vigas como en las columnas, respecto a las necesarias para cargas verticales, para lograr que la estructura tenga la rigidez y resistencia apropiada ante cargas horizontales.

Una forma de rigidizar un pórtico, sin perder sus ventajas, es colocando diagonales o rellenando sus espacios con muros de mampostería o de hormigón, estos dos últimos procedimientos son los más usados y en cada uno de ellos la estructura puede visualizarse como un voladizo. Para relaciones bajas de esbeltez el muro absorbe prácticamente toda la carga horizontal mientras que el diseño del pórtico lo controla únicamente las cargas verticales.

## 1.2 FILOSOFÍA DEL SISTEMA DUAL

En un pórtico las derivas de piso son proporcionales al cortante de piso, las derivas de piso tienden a ser mayores en los pisos inferiores. En un muro esbelto las derivas crecen en los pisos superiores pues las deformaciones por cortante dejan de ser importantes y el muro se comporta como una viga en voladizo.



En los pisos inferiores la rigidez del muro es muy alta y restringe las derivas del pórtico. En los pisos superiores el muro tiende a tener grandes derivas, mayores que las que tendría el pórtico si tuviese que soportar por si solo toda la carga lateral, de manera que en los pisos superiores el muro en vez de ayudar al pórtico incrementa las fuerzas horizontales que estos deben resistir. En conclusión: En los primeros pisos el pórtico se apoya en el muro y en los pisos superiores es el muro el que se apoya en el pórtico.

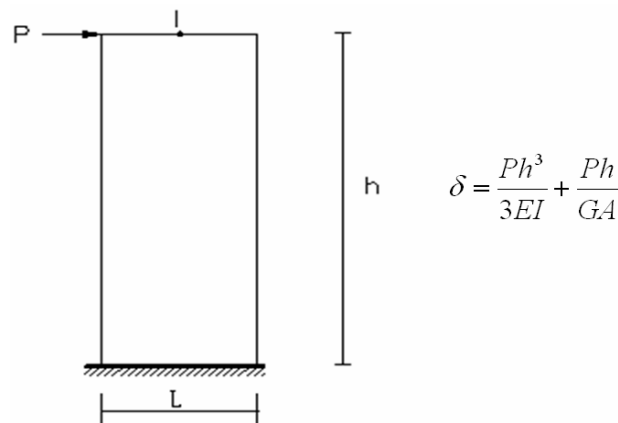


Cuando la altura del edificio es considerable su rigidez ante cargas laterales puede obtenerse acoplando dos o mas muros a través de vigas de gran altura, estas vigas restringen el giro de los muros en cada entrepiso y hacen trabajar los muros que se acoplan como una unidad. La eficiencia de los muros acoplados depende de la rigidez de los muros de enlace.

### 1.3 IDEALIZACION DE LOS MUROS, MÉTODO DE LA VIGA ANCHA

Aceptando un empotramiento elástico del material, las deformaciones del muro, antes cargas aplicadas en su propio plano, deben calcularse por los métodos y teoría de la elasticidad.

Existen soluciones analíticas para ciertos casos sencillos y para aquellos de geometría complicada la solución puede obtenerse aplicando el método del elemento finito. En el caso de muros empotrados en su base y sujetos a una carga lateral,  $P$ , aplicada en su extremo superior, el desplazamiento lateral del extremo cargado,  $\delta$ , se puede calcular con muy buena precisión por la siguiente expresión deducida en la Resistencia de Materiales:



En la figura que a continuación se muestra, se comparan los resultados obtenidos con la expresión anterior se comparan los resultados obtenidos con la expresión anterior

con el método del elemento finito (solución exacta) de ella se concluye que los errores no exceden del 4%, para fines prácticos las deformaciones laterales para muros aislados pueden calcularse aplicando los conceptos de la Resistencia de Materiales considerando los efectos de flexión y de cortante.

En muros bajos,  $h < L/3$ , se pueden despreciar las deformaciones por flexión, representan solo el 10% o el 15% del total,

$$\delta = \frac{Ph}{GA}$$

En muros esbeltos,  $h > L/3$ , tienen importancia las deformaciones tanto por flexión como por cortante, generalmente estos muros se encuentran acoplados con pórticos (sistema dual) y la interacción muro-pórtico altera las rigideces de entrepiso.

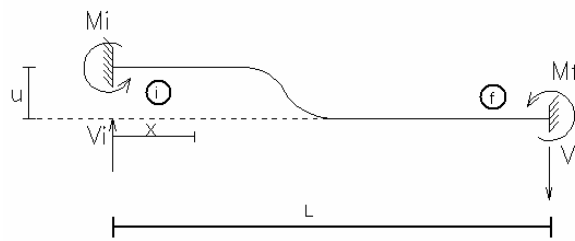
La idealización del muro se fundamenta en que sus deformaciones laterales pueden calcularse con buena precisión por la Resistencia de materiales, considerando las deformaciones por flexión y por cortante. Se denomina columna ancha a un elemento así idealizado para distinguirlo de las columnas normales en las cuales solo es importante las deformaciones por flexión.

Para considerar sistemas de muros y muros-pórticos (sistema dual), se considera cada muro como una columna ancha con sus propiedades concentradas en el eje centroidal y se asume que las zonas de las vigas que se encuentran dentro de los muros son infinitamente rígidas. Esta modelación tiene la gran ventaja de poder analizar sistemas duales como pórticos.

## 1.4 CONSIDERACIONES DEL EFECTO DE LAS DEFORMACIONES POR CORTANTE

### 1.4.1 Análisis del desplazamiento normal a la barra en el nudo inicial

Para el análisis de los desplazamientos normales al elemento se estudiará por comodidad el siguiente caso general:



$$M_x = V_i * x - M_i, \quad V_x = V_i$$

$$\int \frac{M_x^2}{2EI} * dx + F_f \int \frac{V_x^2}{2GA} * dx = \int \frac{(V_i * x - M_i)^2}{2EI} + F_f \int \frac{V_i^2}{2GA}$$

$$\frac{\partial U}{\partial M_i} = 0 = \int \frac{(V_i * x - M_i) * (-1)}{EI} * dx$$

$$\frac{V_i * L^2}{2} - M_i * L = 0$$

**Ecuación 1**

$$\frac{\partial U}{\partial V_i} = u = \int \frac{(V_i * x - M_i) * x}{EI} * dx + F_f \int \frac{V * dx}{GA}$$

$$EIu = \frac{V_i * L^3}{3} - \frac{M_i * L^2}{2} + F_f \frac{V_i * L * EI}{GA} = 0$$

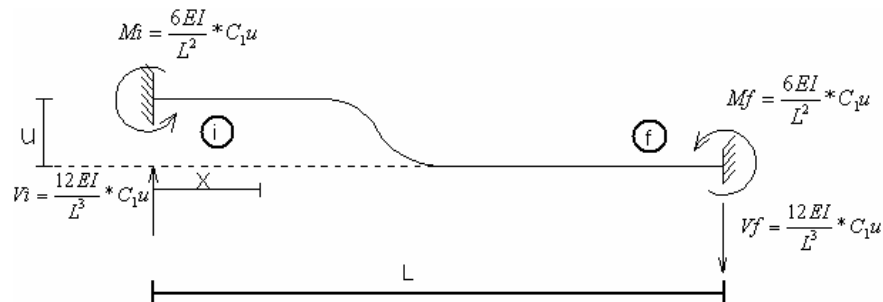
**Ecuación 2**

Despejando de la **Ecuación 1** el valor de  $M_i$  y reemplazándolo en la **Ecuación 2** se obtiene:

$$EIu = \left( \frac{Vi * L^3}{3} - \frac{Vi * L^3}{4} \right) + Ff \frac{Vi * L * EI}{GA} = 0, \quad EIu = \left( \frac{Vi * L^3}{12} \right) + Ff \frac{Vi * L * EI}{GA} = 0$$

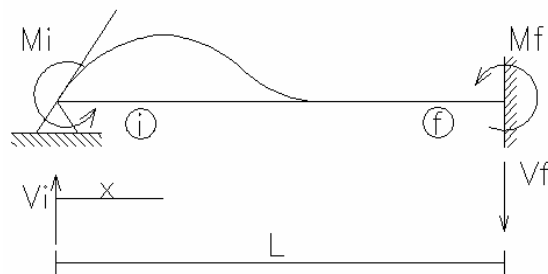
$$\frac{12EI}{L^3} * u = Vi \left( 1 + Ff \frac{12EI}{GAL^2} \right), \quad Vi = \frac{12EI}{L^3} * C_1 u, \quad C_1 = \frac{1}{1 + Ff \frac{12EI}{GAL^2}}$$

Por equilibrio estático se determinan las fuerzas en el extremo final de la barra.



- Análisis del giro en el nudo inicial:**

Para el análisis de los giros de la elástica se estudiará, por comodidad, el siguiente caso esquemático:



$$Mx = Vi * x - Mi, \quad Vx = Vi$$

$$U = \int \frac{(V_i * x - M_i)^2}{2EI} * dx + F_f \int \frac{V_i^2}{2GA} * dx \quad \text{Ecuación 1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial M_i} = u = \int \frac{(V_i * x - M_i) * (-1)}{EI} * dx \quad E I u = -\frac{V_i L^2}{2} + 2 * F_f \frac{V_i * EI}{GA} \quad \text{Ecuación 2}$$

Reemplazando la **Ecuación 2** en la **Ecuación 1** se obtiene:

$$E I u = -\frac{V_i L^2}{2} + \frac{2 V_i * L^2}{3} + F_f \frac{V_i * EI}{GA}, \quad V_i = \frac{6EI}{L^2} * C_1 * u, \quad C_1 = \frac{1}{1 + F_f \frac{12 * EI}{GA L^2}}$$

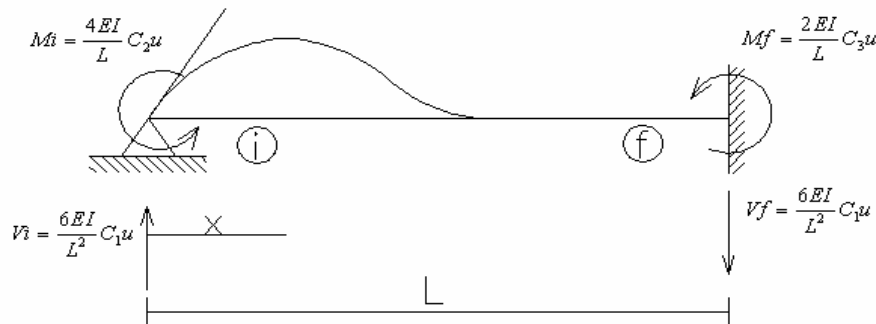
De la **Ecuación 1**:

$$M_i = \frac{2}{3} * \frac{6EI}{L} C_1 u + 2 F_f \frac{EI}{GA} * \frac{6EI}{L^2} C_1 u, \quad M_i = \frac{4EI}{L} C_1 \left( 1 + \frac{1}{4} * F_f \frac{12EI}{GA L^2} \right) u,$$

$$M_i = \frac{4EI}{L} C_2 u$$

Por equilibrio estático se obtiene para el nudo final:

$$M_f = V_i * L - M_i = \frac{6EI}{L^2} C_1 u L - \frac{4EI}{L} C_2 u = \frac{2EI}{L} C_1 \left( 3 - 2 \left\{ 1 + \frac{1}{4} * F_f \frac{12EI}{GA L^2} \right\} \right) * u = \frac{2EI}{L} C_3 * u$$



Generalizando:

Considerando la deformación axial y generalizando el análisis anterior para el nudo final se obtiene la siguiente matriz de rigidez para un elemento de un pórtico plano, incluyendo el efecto de las deformaciones por cortante, su valor está cuantificado en las constante  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ .

$$\begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3}C_1 & \frac{6EI_z}{L^2}C_1 & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3}C_1 & \frac{6EI_z}{L^2}C_1 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2}C_1 & \frac{4EI_z}{L}C_2 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2}C_1 & \frac{2EI_z}{L}C_3 \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3}C_1 & -\frac{6EI_z}{L^2}C_1 & 0 & \frac{12EI_z}{L^3}C_1 & -\frac{6EI_z}{L^2}C_1 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2}C_1 & \frac{2EI_z}{L}C_3 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2}C_1 & \frac{4EI_z}{L}C_2 \end{bmatrix}$$

Definiendo:

$$M = Ff \frac{12 * EI}{GAL^2}$$

Donde:

$Ff$  = Factor de forma. Para secciones rectangulares  $Ff=1.2$  y para secciones circulares  $Ff=10/9$

$G$  = Módulo de cortante.

Se tiene que:

$$C_1 = \frac{1}{1 + Ff \frac{12 * EI}{GAL^2}} = \frac{1}{1 + M}$$

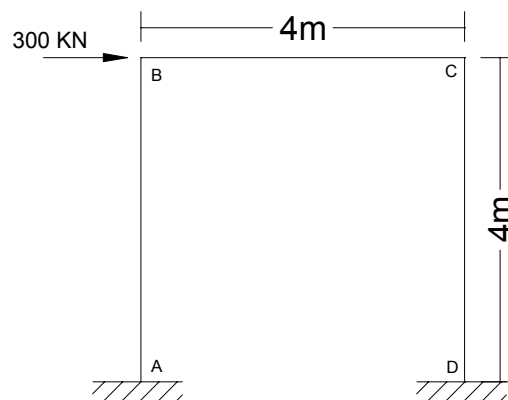
$$C_2 = \frac{1 + M/4}{1 + M}$$

$$C_3 = \frac{1 - M/2}{1 + M}$$

Si en un elemento no se desea considerar el efecto de la deformación por cortante basta con hacer el término  $M = 0$  para que las constantes  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  tomen el valor de 1.

### Ejercicio

Determinar el valor del desplazamiento horizontal ocurrido en los nodos B y C del siguiente pórtico. Solucionarlo haciendo uso del método de análisis matricial:

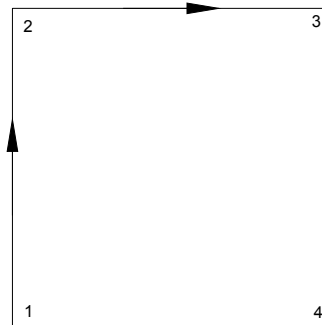


- Sin considerar el efecto cortante.
- Considerando el efecto cortante.

Solución:

**a. Sin considerar el efecto cortante:**

Se empieza por numerar y orientar los elementos como se indica a continuación:



En el siguiente cuadro se presenta para facilitar el proceso de cálculo de las matrices:

Elemento	$AE/L$	$EI$	$2 EI/L$	$4 EI/L$	$6 EI/L^2$	$12 EI/L^3$
1 - 2						
2 - 3	716581.89	38211.73	19105.86	38211.73	14329.40	7164.70
3 - 4						

(En kilonewtons y metros)

Planteando las ecuaciones individuales para cada uno de los elementos en coordenadas globales, se tiene:

**Elemento 1 (Columna)**

$F_x 12$	$7164.70$	$0$	$-14329.40$	$-7164.70$	$0$	$-14329.40$	$U 1$
$F_y 12$	$0$	$716581.89$	$0$	$0$	$-716581.89$	$0$	$V 1$
$M_z 12$	$-14329.40$	$0$	$38211.73$	$14329.40$	$0$	$19105.86$	$\theta 1$
$F_x 21$	$-7164.70$	$0$	$14329.40$	$7164.70$	$0$	$14329.40$	$U 2$
$F_y 21$	$0$	$-716581.89$	$0$	$0$	$716581.89$	$0$	$V 2$
$M_z 21$	$-14329.40$	$0.00$	$19105.86$	$14329.40$	$0.00$	$38211.73$	$\theta 2$



Fx 12				U 1
Fy 12		K 11	K 21	V 1
Mz 12	=			θ 1
Fx 21				U 2
Fy 21		K 12	K 22	V 2
Mz 21				θ 2

### Elemento 2 (Viga)

Fx 23		716581.89	0	0.00	-716581.89	0	0.00	U 2
Fy 23		0	7164.70	14329	0	-7164.70	14329	V 2
Mz 23	=	0.00	14329	38211.73	0.00	-14329	19105.86	θ 2
Fx 32		-716581.89	0	0.00	716581.89	0	0.00	U 3
Fy 32		0	-7164.70	-14329	0	7164.70	-14329	V 3
Mz 32		0.00	14329.40	19105.86	0.00	-14329.40	38211.73	θ 3

Fx 23				U 2
Fy 23		K 22	K 23	V 2
Mz 23	=			θ 2
Fx 32				U 3
Fy 32		K 32	K 33	V 3
Mz 32				θ 3

### Elemento 3 ( Columna )

Fx 34		716581.89	0	0.00	-716581.89	0	0.00	U 3
Fy 34		0	7164.70	14329	0	-7164.70	14329	V 3
Mz 34	=	0.00	14329	38211.73	0.00	-14329	19105.86	θ 3
Fx 43		-716581.89	0	0.00	716581.89	0	0.00	U 4
Fy 43		0	-7164.70	-14329	0	7164.70	-14329	V 4
Mz 43		0.00	14329.40	19105.86	0.00	-14329.40	38211.73	θ 4

Fx 34				U 3
Fy 34		K 33	K 34	V 3
Mz 34	=			θ 3
Fx 43				U 4
Fy 43		K 43	K 44	V 4
Mz 43				θ 4

Ensamblando ahora la parte correspondiente a los nudos libres, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{e22} & K_{e23} \\ K_{e32} & K_{e33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$K_{e22}$  = Ensamble del nodo 2. Se suma de la matriz  $K_{22}$  del elemento 1 con la matriz  $K_{22}$  del elemento 2.

$K_{e33}$  = Ensamble del nodo 3. Se suma de la matriz  $K_{33}$  del elemento 2 con la matriz  $K_{33}$  del elemento 3.

$$\begin{bmatrix} 300 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 723746.59 & 0 & 14329.40 & -716581.89 & 0 & 0.00 \\ 0 & 723746.59 & 14329 & 0 & -7164.70 & 14329 \\ 14329.40 & 14329 & 76423.46 & 0.00 & -14329 & 19105.86 \\ -716581.89 & 0 & 0.00 & 723746.59 & 0 & 14329.40 \\ 0 & -7164.70 & -14329 & 0 & 723746.59 & -14329 \\ 0.00 & 14329.40 & 19105.86 & 14329.40 & -14329.40 & 76423.46 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \theta_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

Solucionando el sistema de seis ecuaciones se obtiene el valor de los desplazamientos en los nodos 2 y 3 de la estructura. El valor buscado de desplazamiento horizontal es:

$$u_2 = u_3 = 3.01 \times 10^{-2} \text{ m.} \rightarrow$$

$$u_2 = u_3 = 3.01 \text{ cm.} \rightarrow$$

#### b. Considerando el efecto cortante.

Para este caso, se utilizara la matriz de rigidez que considera el efecto cortante. Se mantendrá la misma nomenclatura y orientación de los elementos usada en el caso anterior.

Los coeficientes para la matriz son:

$$F_f = 1.2$$

$$G = 0.4 \cdot E_c = 7.17 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$$

$$M = 0.03$$

$$C_1 = 0.971$$

$$C_2 = 0.978$$

$$C_3 = 0.953$$

En el siguiente cuadro se presenta para facilitar el proceso de cálculo de las matrices:

Elemento	AE/L	EI	2 EI/L · C <sub>3</sub>	4 EI/L · C <sub>2</sub>	6 EI/L <sup>2</sup> · C <sub>1</sub>	12 EI/L <sup>3</sup> · C <sub>1</sub>
1 - 2						
2 - 3	716581.89	38211.73	18265.21	37371.07	13913.85	6956.92
3 - 4						

- (En kilonewtons y metros)

Planteando las ecuaciones individuales para cada uno de los elementos en coordenadas globales, se tiene:

Elemento 1 (Columna)

Fx 12	6956.92	0	-13913.85	-6956.92	0	-13913.85	U 1
Fy 12	0	716581.89	0	0	-716581.89	0	V 1
Mz 12	-13913.85	0	37371.07	13913.85	0	18265.21	θ 1
Fx 21	-6956.92	0	13913.85	6956.92	0	13913.85	U 2
Fy 21	0	-716581.89	0	0	716581.89	0	V 2
Mz 21	-13913.85	0.00	18265.21	13913.85	0.00	37371.07	θ 2

Fx 12			U 1
Fy 12	K 11	K 21	V 1
Mz 12			θ 1
Fx 21			U 2
Fy 21	K 12	K 22	V 2
Mz 21			θ 2

### Elemento 2 (Viga)

$$\begin{array}{|c|} \hline Fx\ 23 \\ \hline \\ \hline Fy\ 23 \\ \hline \\ \hline Mz\ 23 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 716581.89 & 0 & 0 & -716581.89 & 0 & 0.00 \\ \hline 0 & 6956.92 & 13914 & 0 & -6956.92 & 13914 \\ \hline 0 & 13914 & 37371.07 & 0 & -13914 & 18265.21 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline U\ 2 \\ \hline \\ \hline V\ 2 \\ \hline \\ \hline \theta\ 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline Fx\ 32 \\ \hline \\ \hline Fy\ 32 \\ \hline \\ \hline Mz\ 32 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline -716581.89 & 0 & 0.00 & 716581.89 & 0 & 0.00 \\ \hline 0 & -6956.92 & -13914 & 0 & 6956.92 & -13914 \\ \hline 0.00 & 13913.85 & 18265.21 & 0.00 & -13913.85 & 37371.07 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline U\ 3 \\ \hline \\ \hline V\ 3 \\ \hline \\ \hline \theta\ 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline Fx\ 23 \\ \hline \\ \hline Fy\ 23 \\ \hline \\ \hline Mz\ 23 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline K\ 22 & K\ 23 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline U\ 2 \\ \hline \\ \hline V\ 2 \\ \hline \\ \hline \theta\ 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline Fx\ 32 \\ \hline \\ \hline Fy\ 32 \\ \hline \\ \hline Mz\ 32 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline K\ 32 & K\ 33 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline U\ 3 \\ \hline \\ \hline V\ 3 \\ \hline \\ \hline \theta\ 3 \\ \hline \end{array}$$

### Elemento 3 (Columna)

$$\begin{array}{|c|} \hline Fx\ 34 \\ \hline \\ \hline Fy\ 34 \\ \hline \\ \hline Mz\ 34 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 716581.89 & 0 & 0 & -716581.89 & 0 & 0.00 \\ \hline 0 & 6956.92 & 13914 & 0 & -6956.92 & 13914 \\ \hline 0 & 13914 & 37371.07 & 0 & -13914 & 18265.21 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline U\ 3 \\ \hline \\ \hline V\ 3 \\ \hline \\ \hline \theta\ 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline Fx\ 43 \\ \hline \\ \hline Fy\ 43 \\ \hline \\ \hline Mz\ 43 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline -716581.89 & 0 & 0.00 & 716581.89 & 0 & 0.00 \\ \hline 0 & -6956.92 & -13914 & 0 & 6956.92 & -13914 \\ \hline 0.00 & 13913.85 & 18265.21 & 0.00 & -13913.85 & 37371.07 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline U\ 4 \\ \hline \\ \hline V\ 4 \\ \hline \\ \hline \theta\ 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline Fx\ 34 \\ \hline \\ \hline Fy\ 34 \\ \hline \\ \hline Mz\ 34 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline K\ 33 & K\ 34 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline U\ 3 \\ \hline \\ \hline V\ 3 \\ \hline \\ \hline \theta\ 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline Fx\ 43 \\ \hline \\ \hline Fy\ 43 \\ \hline \\ \hline Mz\ 43 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline K\ 43 & K\ 44 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline U\ 4 \\ \hline \\ \hline V\ 4 \\ \hline \\ \hline \theta\ 4 \\ \hline \end{array}$$

Ensamblando ahora la parte correspondiente a los nudos libres, se obtiene:

$$\begin{array}{|c|} \hline Fx\ 2 \\ \hline \\ \hline Fy\ 2 \\ \hline \\ \hline Mz\ 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline K\ s\ 22 & K\ 23 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline U\ 2 \\ \hline \\ \hline V\ 2 \\ \hline \\ \hline \theta\ 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline Fx\ 3 \\ \hline \\ \hline Fy\ 3 \\ \hline \\ \hline Mz\ 3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline K\ 32 & K\ s\ 33 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline U\ 3 \\ \hline \\ \hline V\ 3 \\ \hline \\ \hline \theta\ 3 \\ \hline \end{array}$$

$K\ s\ 22$  = Suma de la matriz  $K\ 22$  del elemento 1 con la matriz  $K\ 22$  del elemento 2.

$K_{s33}$  = Suma de la matriz  $K_{33}$  del elemento 2 con la matriz  $K_{33}$  del elemento 3.

$$\begin{bmatrix} 300 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 723538.81 & 0 & 13913.85 & -716581.89 & 0 & 0.00 \\ 0 & 723538.81 & 13914 & 0 & -6956.92 & 13914 \\ 13913.85 & 13914 & 74742.14 & 0.00 & -13914 & 18265.21 \\ -716581.89 & 0 & 0.00 & 723746.59 & 0 & 14329.40 \\ 0 & -6956.92 & -13914 & 0 & 723538.81 & -13914 \\ 0.00 & 13913.85 & 18265.21 & 14329.40 & -13913.85 & 75582.80 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \theta_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

Solucionando el sistema de seis ecuaciones se obtiene el valor del desplazamiento horizontal buscado:

$$u_2 = u_3 = 3.06 \times 10^{-2} \text{ m.} \rightarrow$$

$$u_2 = u_3 = 3.06 \text{ cm.} \rightarrow$$

Como se puede observar, el valor del desplazamiento horizontal al considerar la deformación por cortante aumento solo en 1.63 % con relación al valor obtenido en el **caso a.** (sin deformación por cortante). Es por esto que en los pórticos y vigas continuas es perfectamente aceptable el despreciar las deformaciones por efecto cortante.

Rigidez del pórtico al desplazamiento

La rigidez de piso ( $R_i$ ) se puede definir de forma sencilla como la relación que existe entre la fuerza cortante en el piso (i) dividida por el desplazamiento relativo  $\Delta_i$  en el entrepiso.

La rigidez de piso es igual a:

$$R_i = \frac{V_i}{\Delta_i}$$

Aplicando el anterior concepto al pórtico analizado, se puede decir que:

- La rigidez por desplazamiento horizontal al no considerar efectos cortantes es:

$$R = \frac{300}{3.01} = 99.45 \text{ kN / cm.}$$

Esto quiere decir, que para producir un desplazamiento unitario, un centímetro en este caso, es necesario aplicarle al pórtico en el nodo 2 o 3, una fuerza horizontal de 99.45 kN

- La rigidez por desplazamiento horizontal considerando los efectos cortantes es:

$$R = \frac{300}{3.06} = 97.69 \text{ kN / cm.}$$

En este caso se uso la fuerza de 300 kN para el calculo de la rigidez, pero al igual se pudo haber supuesto una fuerza cualquiera y con esta calcular los desplazamientos haciendo uso de alguno de los métodos elásticos conocidos (Kani, Slope-deflection, análisis matricial como se hizo en el ejemplo, entre otros).

Así por ejemplo si se hubiera supuesto una fuerza de 600 kN , el desplazamiento habria sido de 6.03 cm. para el **caso a** y de 6.14 cm. para el **caso b**, en ambos casos obteniendo el doble del valor obtenido con la carga de 300 kN , pero la rigidez se conserva.

Así:

$$R = \frac{600}{6.03} = 99.45 \text{ kN / cm.} \quad \text{y} \quad R = \frac{600}{6.14} = 97.69 \text{ kN / cm.}$$

El resultado de dividir la fuerza supuesta entre el desplazamiento ocasionado es la rigidez al desplazamiento del pórtico analizado. Este procedimiento sencillo arroja resultados exactos de rigidez solo en el caso de estructuras de un grado de libertad, como la que se esta analizando en este ejemplo.

Para el cálculo de las rigideces al desplazamiento de estructuras de varios grados de libertad se usaran métodos mas avanzados como el del análisis modal, el cual se tratara en los textos de dinámica estructural.

## Ejercicio 2

Para este segundo ejemplo se plantea realizar el análisis de deformación horizontal para un muro:

- Sin tener en cuenta el efecto cortante
- Considerando el efecto cortante

Para que exista una similitud entre el pórtico y el muro, este último tendrá la misma altura y el mismo volumen de concreto que el pórtico.

Solución:

- Geometría del muro

Volumen del muro:

Debido a que los 3 elementos del pórtico tienen la misma sección y longitud, el volumen de concreto del pórtico es:

$$\text{Vol.}_{\text{concreto}} = 3 \cdot (0.4 \times 0.4) \cdot 4 = 1.92 \text{ m}^3$$

Sección transversal del muro:

Como se menciona en el enunciado del ejercicio, el muro tendrá la misma altura del pórtico ( $h_{\text{muro}} = 4 \text{ m}$ ). El espesor típico usado en los muros estructurales actualmente esta entre los 10 y 12 cm. Para este ejemplo tipo se escogió un espesor para el muro de 12 cm. ( $e_{\text{muro}} = 0.12 \text{ m}$ ). Así que simplemente queda por conocer la longitud que tendrá el muro.

$$L_{\text{muro}} = \frac{1.92 \text{ m}^3}{(4 \times 0.12) \text{ m}^2} = 4 \text{ m}$$

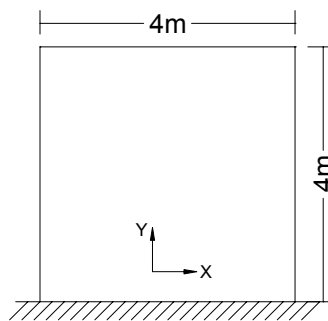
A continuación se presenta el esquema del muro con sus dimensiones:

- Análisis de desplazamiento:

En este caso el muro se considerara como viga ancha en voladizo, el cual esta empotrado en su base y esta sujeto a la acción de una carga lateral P aplicada en su extremo superior.

**a. Sin considerar el efecto cortante:**

El elemento se orienta como se indica a continuación:



En el siguiente cuadro se presenta para facilitar el proceso de cálculo de la matriz:

Elemento	AE/L	EI	2 EI/L	4 EI/L	6 EI/L <sup>2</sup>	12 EI/L <sup>3</sup>
1 - 2	2149745.66	11465310.18	5732655.09	11465310.18	4299491.32	2149745.66

- (en kilonewtons y metros)

Planteando las ecuaciones del elemento en coordenadas globales, se tiene:



Fx1	2149745.66	0	-4299491.32	-2149745.66	0	-4299491.32	0
Fy1	0	2149745.66	0	0	-2149745.66	0	0
Fz1	-4299491.32	0	11465310.18	4299491.32	0	5732655.09	0
300	-2149745.66	0	4299491.32	2149745.66	0	4299491.32	U 2
0	0	-2149745.66	0	0	2149745.66	0	V 2
0	-4299491.32	0.00	5732655.09	4299491.32	0.00	11465310.18	θ 2

Tomando ahora la parte correspondiente al nodo libre, se tiene:

300		U 3
0	= K 33 .	V 3
0		θ 3

300	2149745.66	0	4299491.32	U 2
0	0	2149745.66	0	V 2
0	4299491.32	0	11465310.18	θ 2

Solucionando el sistema de tres ecuaciones se obtiene el valor del desplazamiento horizontal:

$$u_2 = 5.58 \times 10^{-4} \text{ m.} \rightarrow$$

$$u_2 = 0.056 \text{ cm.} \rightarrow$$

#### b. Considerando el efecto cortante.

Para este caso, se utilizara la matriz de rigidez que considera el efecto cortante. Se mantendrá la misma nomenclatura y orientación de los elementos usada en el caso anterior.

Los coeficientes del cortante para la matriz son:

$$Ff = 1.2$$

$$G = 0.4 \cdot E_c = 7.17 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$$

$$M = 3$$

$$C_1 = 0.25$$

$$C_2 = 0.438$$

$$C_3 = -0.125$$

En el siguiente cuadro se presenta para facilitar el proceso de cálculo de las matrices:

Elemento	AE/L	EI	2 EI/L	4 EI/L	6 EI/L <sup>2</sup>	12 EI/L <sup>3</sup>
1 - 2	2149745.66	11465310.18	-716581.886	5021805.86	1074872.83	537436.415

- (en kilonewtons y metros)

Planteando las ecuaciones del elemento en coordenadas globales, se tiene:

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \\ 300 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 537436.41 & 0 & -1074872.83 & -537436.41 & 0 & -1074872.83 \\ 0 & 537436.41 & 0 & 0 & -537436.41 & 0 \\ -1074872.83 & 0 & 5021805.86 & 1074872.83 & 0 & -716581.89 \\ -537436.41 & 0 & 1074872.83 & 537436.41 & 0 & 1074872.83 \\ 0 & -537436.41 & 0 & 0 & 537436.41 & 0 \\ -1074872.83 & 0.00 & -716581.89 & 1074872.83 & 0.00 & 5021805.86 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_2 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Tomando ahora la parte correspondiente al nodo libre, se tiene:

$$\begin{bmatrix} 300 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_{33} \cdot \begin{bmatrix} U_3 \\ V_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 300 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 537436.41 & 0 & 1074872.83 \\ 0 & 537436.41 & 0 \\ 1074872.83 & 0 & 5021805.86 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Solucionando el sistema de tres ecuaciones se obtiene el valor del desplazamiento horizontal:

$$u_2 = 9.76 \times 10^{-4} \text{ m.} \rightarrow$$

$$u_2 = 0.098 \text{ cm.} \rightarrow$$

En el caso de los muros, se puede ver que el efecto de deformación por cortante es bastante importante para su análisis. Si se comparan los dos valores de desplazamiento horizontal obtenidos en el análisis del muro se obtendrá un aumento del 43% al considerar los efectos de cortante.

Rigidez del muro al desplazamiento

Su calculo se hará de la misma forma como se hizo en el ejemplo del pórtico.

$$R_i = \frac{V_i}{\Delta_i}$$

- La rigidez por desplazamiento horizontal al no considerar efectos cortantes es:

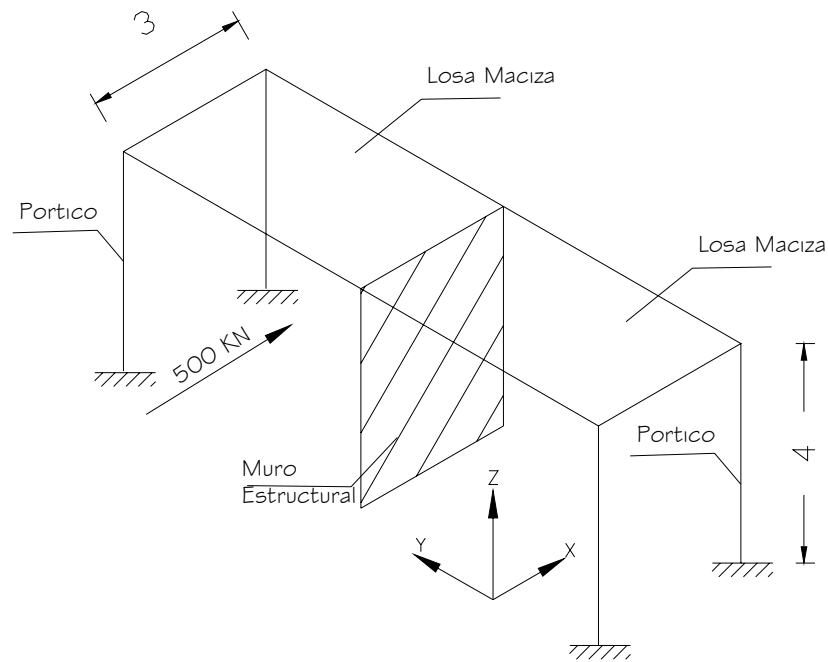
$$R = \frac{300}{0.056} = 5357.14 \text{ kN / cm.}$$

- La rigidez por desplazamiento horizontal al no considerar efectos cortantes es:

$$R = \frac{300}{0.098} = 3061.22 \text{ kN / cm.}$$

Ejemplo 3.

Considérese el siguiente sistema:



Dimensiones:

Vigas :  $0.5 \times 0.5 \text{ m}$

Columnas:  $0.5 \times 0.5 \text{ m}$

Muro:  $e = 0.10 \text{ m}$ .  $l = 4 \text{ m}$ .

Altura entrepiso (h) = 4 m.

Si se aplica una fuerza de  $500 \text{ kN}$  en la dirección Z sobre la losa maciza, cual será el valor de la fuerza que absorberá cada uno de los elementos de resistencia en esta dirección (pórticos y muro) ?

Para dar solución a este ejercicio es necesario conocer la rigidez al desplazamiento tanto de los pórticos como del muro en la dirección Z. El procedimiento a seguir para el calculo de la rigidez es exactamente el mismo al visto en el ejemplo 1 para pórticos y en el ejemplo 2 para muros (considerando el efecto de cortante).

Para este caso se supuso una fuerza horizontal de 100 *kN* para los pórticos y el muro y se calcularon los desplazamientos mediante el método matricial, obteniendo los siguientes resultados:

$$\text{Portico 1} = \text{Portico 2} = : u_x = 3.90 \times 10^{-1} \text{ cm.} \rightarrow$$

$$\text{Muro} = u_x = 7.50 \times 10^{-2} \text{ cm.} \rightarrow$$

Y con estos calculando las rigideces de desplazamiento:

$$K_{P1} = K_{P2} = 256.41 \text{ kN/cm}$$

$$K_{MURO} = 1333.33 \text{ kN/cm}$$

Recuérdese que este procedimiento solo arroja valores exactos para estructuras de un grado de libertad.

La fuerza para cada uno de los pórticos y el muro puede ser escrita en de la siguiente manera:

$$F_{P1} = K_{P1} \cdot U_{P1}$$

$$F_{P2} = K_{P2} \cdot U_{P2}$$

$$F_{MURO} = K_{MURO} \cdot U_{MURO}$$

El desplazamiento horizontal que sufrirá la losa por el efecto de la carga de 500 *kN* será el mismo en todos los puntos de la losa. Bajo esta consideración se puede decir que  $U_{P1} = U_{P2} = U_{MURO} = U_{LOSA}$ , así se obtiene que:

$$F_{P1} = K_{P1} \cdot U_{LOSA}$$

$$F_{P2} = K_{P2} \cdot U_{LOSA}$$

$$F_{MURO} = K_{MURO} \cdot U_{LOSA}$$

Como se sabe, la carga total ( $F_T$ ) actuante en el sentido Z de 500 kN debe ser igual a la suma de la fuerza en cada elemento resistente, es decir:

$$F_T = F_{P1} + F_{P2} + F_{MURO}$$

$$F_T = K_{P1} \cdot U_{LOSA} + K_{P2} \cdot U_{LOSA} + K_{MURO} \cdot U_{LOSA}$$

Factorizando el término  $U_{LOSA}$  y despejando:

$$U_{LOSA} = F_T / (K_{P1} + K_{P2} + K_{MURO})$$

Si se reemplaza este termino en la ecuación de fuerza para el pórtico, se tiene:

$$F_{P1} = K_{P1} \cdot \left[ F_T / (K_{P1} + K_{P2} + K_{MURO}) \right]$$

Que escrita en forma general:

$$F_i = \frac{K}{\sum K} \cdot F_T$$

Como se puede ver, la fuerza horizontal total de 500 kN se distribuirá en cada uno de los elementos de resistencia en proporción a la rigidez del pórtico o del muro dividida entre la suma de todas las rigideces de los elementos resistentes en esta dirección, así:

$$\sum K = 2 \cdot (256.41) + 1333.33 = 1846.15$$

$$F_{P1} = \frac{K_{P1}}{\sum K} \cdot F_T = \frac{256.31}{1846.15} \cdot 500 = 69.42 \text{ kN}$$

$$F_{P2} = 69.42 \text{ kN}$$

$$F_{MURO} = 361.11 \text{ kN}$$

Como se puede observar, cada uno de los pórticos recibió el 14% de la fuerza de 500 kN, mientras el muro recibió el 72% de la fuerza horizontal.

## CONCLUSIONES

- Los métodos de Kani, Cross, Viga conjugada, Slope deflection son métodos tradicionales para el Análisis de Estructuras de gran importancia para el estudiante de ingeniería civil ya que le aporta los fundamentos teóricos sobre ellos, y a la vez desarrolla su capacidad para pensar lógica, racional y analíticamente y cultiva su apreciación, su sentido y su intuición, en relación con el comportamiento de las estructuras
- El desconocimiento de los métodos de Análisis Estructural podría convertirse en un peligro para un profesional poco familiarizado que quiera utilizar un procedimiento de análisis más sofisticado, ya que podría perder el sentido físico del problema que está resolviendo al no poder determinar de manera adecuada los datos relevantes que alimentan el modelo y no tener la sensibilidad para juzgar sobre si los resultados que está obteniendo son o no realistas
- Los métodos de Análisis estructural tradicionales constituyen el referente histórico y teórico que le permiten valorar al estudiante los acontecimientos científicos y sociales que dieron origen al desarrollo de métodos más precisos de gran uso en la actualidad.
- No obstante el desarrollo de las calculadoras electrónicas y el perfeccionamiento de las herramientas Software, se hace necesario tener en cuenta la fundamentación de los métodos tradicionales ya que el conocimiento de ellos permite al estudiante de Ingeniería civil emitir juicios de valor respecto a unos resultados obtenidos.



- Los ejercicios de aplicación que se desarrollan en cada capítulo han sido escogidos de situaciones próximas a la realidad y representados gráficamente, pretendiendo con esto que el estudiante desarrolle la capacidad de asociación entre la realidad y el análisis de los elementos que conforman la estructura como un todo.
- El presente escrito promueve el aprendizaje significativo ya que presenta una secuencia ordenada de los temas, ejemplos aclaratorios desarrollados paso a paso y en forma sucesiva, queriendo con ello ayudar al estudiante a desarrollar una comprensión completa de la aplicación de las teorías estructurales y a adquirir buenos hábitos para organizar y realizar cálculos; cada ejemplo ha sido escogido con el fin de complementar y ampliar las ideas y conceptos que se presentan en el texto
- La intuición y el buen sentido estructural son bases esenciales del análisis de estructuras, esto complementado con la justificación teórica de lo que se ha idealizado puede dar lugar a una estructura confiable
- Los métodos de Kani, Cross, Viga conjugada y Slope Deflection, entre otros, han constituido durante años la columna vertebral del análisis estructural cuya importancia se ha visto reducida con los avances actuales en computación
- Antes de aplicar cualquier método de análisis estructural es necesario plantear una idealización de la estructura real para ser analizada y modelada
- Errores conceptuales de criterio o la simple falla de intuición acerca del comportamiento estructural puede lograr un sobre diseño costoso o un diseño peligroso para la seguridad de la estructura y de quienes lo usan. El proceso de idealización es pues la etapa fundamental en el proceso de análisis y diseño estructural

- El texto está escrito en un lenguaje sencillo así mismo contiene numerosos gráficos, tablas y párrafos cortos desarrollados para facilitar al estudiante la comprensión y apropiación del conocimiento

## **BIBLIOGRAFIA**

**CHAJES Alexander.** 1990. Structural Análisis. New Jersey. Editorial Prentice Hall

**HEAO NORRES Charles, WILBUR BENSON John,** UTKU Senol, 1976. Elementary Structural Analysis, Editorial Mc Graw Hill

**SHEPLEY Eric.**1950. Continuous Beam Structures, A Degree of Fixity Method and the Method of moment Distribution, London, Concrete Publications Limited

**TIMOSHENKO S P** 1965. Theory of structures, Japan. McGraw Hill Kogakusha Ltd

**Mc Corman Jack C.**1975. Structural Analysis. New York, Intext Educational Publishers

**KIA WANG Chu.** 1953, Statically Indeterminate Structures, Japan, Mc Graw Hill-Kodakusha Ltda

**PLUMMER L.** Fred. 1944. Fundamental of Indeterminate Structures. New York, Pitman Publishing Corporation.

**GONZALEZ CUEVAS Oscar M.** 2002, Análisis Estructural. México D.F. Limusa Noriega editores

**MARSHAL W. T. NELSON H. M.** 1977, Structures, 2/e, Londres, Pitman. Publishing Limited

**VALLECILLA B. Carlos Ramiro.** 2003. Fuerzas Sísmicas, principios y aplicaciones NSR 98, Bogotá Colombia. Kimpres Ltda.

**CAMARGO M Carlos, GÓMEZ Laura.** 2006 Diseño estructural.

**MALDONADO RONDON Esperanza, CHIO CHO Gustavo.** 2004. Análisis sísmica de edificaciones. Bucaramanga Colombia. Ediciones Universidad Industrial de Santander

**SALCEDO LUNA José.** 1987, Análisis avanzado de Estructuras. Bucaramanga Colombia. Ediciones Universidad Industrial de Santander

**CROSS Hardy, MORGA Newlin D,** 1953. Estructuras continuas de Hormigón Armado

**KANI G,** 1975, Cálculo de Pórticos de varios pisos. Argentina, Editorial Reverté S.A.

**ROCHEL AWAD Roberto,** Análisis Matricial de Estructuras

**URIBE ESCAMILLA Jairo,** 2000. Análisis de Estructuras. Bogotá Colombia. Editorial escuela Colombiana de Ingeniería

**NILSON Arthur H.** 1999. Diseño de estructuras de Concreto. Bogotá Colombia, Mc Graw Hill

**SEGURA FRANCO Jorge,** 2002 Estructuras de Concreto I. Bogotá Colombia Unibiblos

**MALDONADO RONDON Esperanza, CHIO CHO Gustavo.** 1995. Análisis de Estructuras I. Bucaramanga Colombia. Ediciones Universidad Industrial de Santander

**VALLECILLA B Carlos Ramiro,** 1990, Notas sobre el Método de Kani. Cátedra de Análisis Estructural