

Dim 01

cas stationnaire

cas instationnaire

notation I

$$u(x, t)_i = u(x_i, t) = u_i^n$$

$$u(x_i) = u_i$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = u'_i$$

Schéma avant

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

Schéma arrière

$$u'_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

Schéma centré (d'ordre 2)

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

Dérivée d'ordre supérieur (d'ordre 2)

Schéma centré

$$u''_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2)$$

Schéma avant

$$u''_i = \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)$$

Schéma arrière

$$u''_i = \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)$$

Méthodes numériques II

508 M1

2

Méthodes numériques

Chapitre I: Méthodes des diff finies

Exemples des EDP linéaires du 2nd ordre:

*Eq de poisson (elliptique):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

si $f(x, y) = 0$ l'éq c'est de Laplace.

*Eq de la chaleur (parabolique):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f(x, y, t)$$

$(x, y, t) \in \Omega \times [0, T]$. u représente la chaleur au point (x, y) à l'instant t .

*Eq des ondes (hyperbolique):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f(x, y, t)$$

*Eq de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+$$

\hookrightarrow la vitesse, $c \in \mathbb{R}$

*Eq de Burgers (parabolique):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0$$

Approximation des dérivées par des DF

*la dérivée: $\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h, y, t) - u(x, y, t)}{h}$

*DT: $u(x+h, y, t) = u(x, y, t) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, t) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t) + \dots$

App de la dérivée: $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, t) \approx \frac{u(x+h, y, t) - u(x, y, t)}{h}$

1

Gas multidimensionnel

Dim 02

Notation

stationnaire

$$u(x_i, y_j) = u_{ij}$$

instationnaire

$$u(x, y, t) = u_{ij}^n$$

→ au temps $n \Delta t$

schémas

Dim 03

Notation

$$u(x, y, z, t) = u_{ijk}^n$$

→ au temps $n \Delta t$

schéma avant

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

schéma arrière

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

schéma centré

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2 \Delta x} + O(\Delta x)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_i = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} + O(\Delta y^2)$$

Dérivée mixte

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)_{ij} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4 \Delta x \Delta y} + O((\Delta x + \Delta y)^2)$$

Discretisation de l'équation de la chaleur 1D

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0,t) = u_g \\ u(1,t) = u_d \end{array} \right\} \text{conditions aux limites}$$

$$u(x,0) = u_0 \text{ condition initiale}$$

Schema explicite

discretisation au noeud x_i à l'instant n

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^n = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^n$$

Schema avant d'ordre 1

évaluer la dérivée temporelle

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$$

Schema centre d'ordre 2

la dérivée second en espace

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^n = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

$$u_i^{n+1} = \lambda u_{i-1}^n + (1-2\lambda) u_i^n + \lambda u_{i+1}^n$$

$$tq \quad \lambda = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1-2\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda & 1-2\lambda & \lambda \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1-2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix}^n + \lambda \begin{pmatrix} u_g \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_d \end{pmatrix}$$

Schema implicite

discretisation au noeud x_i à l'iteration $(n+1)$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^{n+1} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^{n+1}$$

Schema centre d'ordre 1

évaluer la dérivée temporelle

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^{n+1} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$$

Schema centre d'ordre 2

dérivée second en espace

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^{n+1} = \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}$$

$$u_i^n = -\lambda u_{i-1}^{n+1} + (1+2\lambda) u_i^{n+1} - \lambda u_{i+1}^{n+1}$$

$$tq \quad \lambda = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$\begin{pmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1+2\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda & 1+2\lambda & -\lambda \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1+2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N-2}^{n+1} \\ u_{N-1}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{N-2}^n \\ u_{N-1}^n \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_g \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_d \end{pmatrix}$$

stabilité d'un schéma

consistance d'un schéma

stabilité d'un schéma explicite

il est stable si
 $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$

$$\lambda = \alpha \frac{\Delta t}{Dx^2}$$

stabilité d'un schéma implicite

il est inconditionnellement stable

convergence des schémas explicites et implicites

stabilité d'un p/b mathématique

un p/b est sensible ou bien mal conditionné si une petite variation des données entraîne une grande variation des résultats

la notion de conditionnement d'un p/b mathématique est indépendante de la m-de numérique

stabilité d'une m-de numérique

la m-de numérique est instable si elle est sujette à une propagation des erreurs. ie à chaque fois les erreurs augmentent.

un p/b mal-conditionné + méthode numérique stable

ça marche pas

un p/b bien conditionné + méthode instable

changement de la méthode pour une m-de plus efficace

5

schéma de Crank-Nicolson

avantages

* il permettra de réduire l'erreur sur la dérivée temporelle en $O(\Delta t^2)$ au lieu de $O(\Delta t)$

* est un schéma inconditionnellement stable.

inconvénients

il est un schéma implicite ce qui peut conduire à des coûts de calcul importants

Formule

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \approx \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right)$$

$$u_i^{n+1} - \frac{1}{2} \lambda (u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) = u_i^n + \frac{1}{2} \lambda (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

$\lambda = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \quad i = 1, N-1$

$$-\frac{1}{2} \lambda u_{i-1}^{n+1} + (1-\lambda) u_i^{n+1} - \frac{1}{2} \lambda u_{i+1}^{n+1} = u_i^n + \frac{1}{2} \lambda (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

$= \frac{1}{2} \lambda u_{i-1}^n + (1-\lambda) u_i^n + \frac{1}{2} \lambda u_{i+1}^n$ $\lambda = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

$$A u^{n+1} = b^n$$

$$b^n = \begin{pmatrix} (1-\lambda)u_1 + \frac{1}{2}\lambda(u_0 + u_2) \\ (1-\lambda)u_2 + \frac{1}{2}\lambda(u_1 + u_3) \\ \vdots \\ (1-\lambda)u_{N-2} + \frac{1}{2}\lambda(u_{N-3} + u_{N-1}) \\ (1-\lambda)u_{N-1} + \frac{1}{2}\lambda(u_{N-2} + u_N) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\lambda \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_N \end{pmatrix}^{n+1}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} 1+\lambda & -\frac{1}{2}\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{2}\lambda & 1+\lambda & -\frac{1}{2}\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\frac{1}{2}\lambda & 1+\lambda & -\frac{1}{2}\lambda \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2}\lambda & 1+\lambda \end{pmatrix}$$

Discretisation de l'équation de la chaleur 2D stationnaire

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (x, y) \in [0, L_x] \times [0, L_y] \\ u(0, y) = u_g & ; u(L_x, y) = u_d & 0 < y < L_y \\ u(x, 0) = u_b & ; u(x, L_y) = u_t & 0 < x < L_x \end{cases}$$

Discretisation au maillage
(x_i, y_j)

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{i,j} = 0$$

Utilisant un schéma centré d'ordre 2 pour approximer les dérivées secondes en espace

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

$$\Delta y^2 (u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + \Delta x^2 (u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) - 2A u_{i,j} = 0 \quad / A = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

pour $i = 1, N-1$ et $j = 1, P-1$

7

Discretisation de l'équation des ondes 1D d'espace

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) & (x, t) \in [0, L] \times [0, T] \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & 0 < t < T \\ u(x, 0) = g(x) & 0 < x < L \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varphi(x) & 0 < x < L \end{cases}$$

schéma centré d'ordre 2 pour approximer la dérivée second temporelle et la dérivée second en espace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$u_i^{n+1} = \lambda^2 u_{i-1}^n + 2(1-\lambda^2)u_i^n + \lambda^2 u_{i+1}^n - u_i^{n-1} + \Delta t^2 f_i^n; \forall i=1, N-1, n=1, m-1 / \lambda = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$u^{n+1} = Au^n - u^{n-1} + F^n / \forall n=1, m-1$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \lambda^2 & 0 & \dots & 2(1-\lambda^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix}^n - \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix}^{n-1} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \end{pmatrix}^n \Delta t^2$$

Méthodes des volumes finies

MDF

utilisation

Résolution numérique des EDP (utilisée dans la mécanique des fluides)

inconvénient

le manque de résultats théorique concernant la convergence

différence entre MDF et MVF

MDF

des approximations des dérivées

MVF

des approximations des intégrales

approche volumes finies

La valeur moyenne

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

↳ la valeur moyenne de la fct f sur $[a, b]$

Des EDP dont les quelles on peut appliquer le MVF

Eq de Navier-Stokes

Dans le cas stationnaire:

$$\begin{cases} -\nabla \Delta v + v \nabla v + \nabla p = f & \text{dans } \Omega \\ \text{ou } v = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

$v \rightarrow$ vitesse cinématique
 $v \rightarrow$ vitesse des fluide
 $p \rightarrow$ la pression

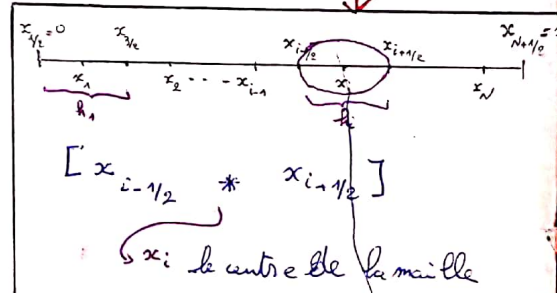
Eq de transport

Eq de Burgers

$v \nabla v$ non linéaire est négligé devant $\nabla \Delta v$;
 le système devient:

$$\begin{cases} -\nabla \Delta u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega \\ \text{div } u = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Les mailles



on a N mailles de centre x_i et de taille:

$$h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$$

Exemple 1- Avec conditions de Dirichlet

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & 0 < x < 1 \\ u(0) = \alpha \\ u(1) = \beta \end{cases}$$

pour un exemple 1- Avec conditions mixtes on fait la même chose que cet exemple avec condition de Dirichlet le seul changement c'est que $u'(x_{N+1/2}) = \beta$ directement

Discretisation spatiale par les VF

intégrer maille par maille l'ED du prob

$$-\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u''(x) dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx$$

valeur moyenne sur $[x_{i-1}, x_i], \forall i=2, N$

$$u'(x_{i-1/2}) = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1/2}}, \forall i=2, N$$

valeur moyenne sur $[x_{1/2}, x_1]$ pour $i=1$

$$u'(x_{1/2}) = \frac{2(u_1 - \alpha)}{h_1}, i=1$$

$$u'(x_{i-1/2}) - u'(x_{i+1/2}) = h_i \bar{f}_i, \forall i=1, N$$

$$\bar{f}_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx$$

La valeur moyenne sur $[x_N, x_{N+1/2}]$ pour $i=N$

$$u'(x_{N+1/2}) = \frac{2(\beta - u_N)}{h_N}, i=N$$

La valeur moyenne sur $[x_i, x_{i+1}], \forall i=1, N-1$

$$u'(x_{i+1/2}) = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}}, \forall i=1, N-1$$

2

$$\begin{aligned} \bullet \frac{2(u_1 - \alpha)}{h_1} - \frac{u_2 - u_1}{h_{3/2}} &= h_1 \bar{f}_1, i=1 \\ \bullet \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1/2}} - \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} &= h_i \bar{f}_i, i=2, N-1 \\ \bullet \frac{u_N - u_{N-1}}{h_{N-1/2}} - \frac{2(\beta - u_N)}{h_N} &= h_N \bar{f}_N, i=N \end{aligned}$$

avec un pas constant on a:

$$\begin{aligned} \bullet 3u_1 - u_2 &= h^2 \left(\bar{f}_1 + \frac{2\alpha}{h^2} \right), i=1 \\ \bullet -u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1} &= h^2 \bar{f}_i, i=2, N-1 \\ \bullet -u_{N-1} + 3u_N &= h^2 \left(\bar{f}_N + \frac{2\beta}{h^2} \right), i=N \end{aligned}$$

Discretisation de l'équation de la chaleur 1-D

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u_g \quad u(1,t) = u_d \\ u(x,0) = u_0 \end{cases}$$

discretisation spatiale par les VF finies à intégrer maille par maille d'EDP du p7b

schéma d'Euler explicite

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^n dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^n dx / \alpha = 1$$

$$Dx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_{i-1/2}}^n - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_{i+1/2}}^n \right], \quad \forall i=1, N$$

La valeur moyenne sur $[x_N, x_{N+1/2}]$ pour $i=N$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_{N+1/2}}^n = \frac{2(u_d^n - u_N^n)}{Dx}$$

La valeur moyenne sur $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i=1, N-1$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_{i+1/2}}^n = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{Dx}$$

La valeur moyenne sur $[x_{i-1}, x_i]$ pour $i=2, N$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_{i-1/2}}^n = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{Dx}$$

La valeur moyenne sur $[x_{1/2}, x_1]$ pour $i=1$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_{1/2}}^n = \frac{2(u_1^n - u_g^n)}{Dx}$$

$$\begin{aligned} u_1^{n+1} &= (1-3\lambda)u_1^n + \lambda u_2^n + 2\lambda u_g^n, \quad i=1 \\ u_i^{n+1} &= \lambda u_{i-1}^n + (1-2\lambda)u_i^n + \lambda u_{i+1}^n, \quad i=2, N-1 \\ u_N^{n+1} &= \lambda u_{N-1}^n + (1-3\lambda)u_N^n + 2\lambda u_d^n, \quad i=N \\ \lambda &= \frac{\Delta t}{Dx^2} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1-3\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1-2\lambda \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 1-3\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{N-1}^n \\ u_N^n \end{pmatrix} + 2\lambda \begin{pmatrix} u_g^n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_d^n \end{pmatrix}$$

Chapitre III: MEF

* La MEF consiste à approcher, dans un se de dim finie , un problème sous forme variationnelle dans un espace de dim infinie. elle est aussi une méthode d'interpolation.

Avantage:

- La MEF permet de traiter des géométries complexes contrairement aux DF et une détermination plus matérielle des conditions aux limites.
- De nombreux résultats théoriques sur la convergence et la majoration des erreurs sont établis.

Inconvénients: Sa mise en œuvre demande un grand coût de temps de calcul et de mémoire.

Les étapes de la MEF

- 1) Formulation des équations gouvernantes et des conditions aux limites: réduction de l'EDF sous forme intégrale (forme variationnelle)
- 2) Division du domaine en sous domaines discretes: le domaine en un mbr fini des éléments et calculer les coordonnées des nœuds

3) Approximation par un élément: Dans chaque élément la variable est approchée par une $\text{fonct linéaire et simple}$. pour $N+1$ point on a besoin d'un polynôme d'interpolation de $\text{degré } N$ - construction des matrices élémentaires.

4) Assemblage et application des conditions aux limites: Former le système algébrique pour les valeurs nodales des variables et combiner les matrices globales à partir des matrices élémentaires.

5) Résolution du système global: ~~après~~ par les différentes méthodes numériques.

Espace des fonctions test:

$$D(\Omega) = \{ u \in C^\infty / u|_{\partial\Omega} = 0 \}$$

$$D(\Omega) = L^2(\Omega) \Leftrightarrow \forall (x_n)_n \text{ une suite de } D(\Omega) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \in L^2(\Omega)$$

Formule de Green: $\forall u \in C^2(\Omega), v \in C^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \Delta u \cdot v = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v \, d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$$

Espace de Sobolev:

$$H^m(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega), \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m \}$$

$$H_0^1([a,b]) = \{ u \in L^2([a,b]), \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(\Omega) \text{ avec } u(a) = u(b) = 0 \}$$

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

Inégalité de Poincaré: si Ω est borné alors

$\exists C = C(\Omega) > 0$ tq:

$$\forall v \in H_0^1(\Omega): \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|v\|_{L^2(\Omega)} = C \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Forme bilinéaire coercive: (elliptique)

$$(a(\cdot, \cdot) \in V \times V \text{ coercive}) \Leftrightarrow (\exists \alpha > 0: a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2 \forall u \in V)$$

Forme linéaire continue:

$$(l(\cdot) \in V' \text{ continue}) \Leftrightarrow (\exists K > 0: |l(u)| \leq K \|u\|_V \forall u \in V)$$

Forme bilinéaire continue:

$$(a(\cdot, \cdot) \in V \times W \text{ continue}) \Leftrightarrow (\exists M > 0: |a(u, w)| \leq M \|u\|_V \cdot \|w\|_W \forall (u, w) \in V \times W)$$

Théorème de Lax-Milgram:

Soit V un espace de Hilbert.

Supposons que $a(\cdot, \cdot)$ bilinéaire + continue + coercive sur V et $l(\cdot)$ linéaire. Alors:

$$\exists! u \in V: a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V$$

• bilinéaire + continue + coercive \Rightarrow existence + unicité

\Rightarrow pnb bien posé

bilinéaire + continue + symétrique + positive + non coercive

\Rightarrow pnb mal posé

Interprétation de u_Ω :

$$a(u - u_\Omega, v) = 0, \quad \forall v \in V_\Omega$$

Si $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique, il s'agit d'un produit scalaire. u_Ω peut être interprétée comme la projection

orthogonale de u sur V_Ω au sens de $a(\cdot, \cdot)$.

Estimation de l'erreur: (Lemme de Céa):

$$\|u - u_\Omega\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_\Omega\| = \frac{M}{\alpha} d(u, V_\Omega) \quad \forall v_\Omega \in V_\Omega$$

La méthode des éléments finis:

V un espace de dim infini

$\rightarrow V_\Omega \subset V$ de dim fin N_Ω (par exemple c'est l'ensemble des fct continue et affines sur chaque maille)

$\rightarrow (\varphi_1, \dots, \varphi_{N_\Omega})$ une base de V_Ω

$$\rightarrow u_\Omega = \sum_{i=1}^{N_\Omega} \mu_i \varphi_i$$

\rightarrow Le pnb devient: Trouver:

$$(P_\Omega) \quad \left\{ \mu_1, \dots, \mu_{N_\Omega} \text{ tq: } \sum_{i=1}^{N_\Omega} \mu_i a(\varphi_i, v_\Omega) = l(v_\Omega), \quad \forall v_\Omega \in V_\Omega \right.$$

$$\rightarrow (P_\Omega) \quad \left\{ \sum_{i=1}^{N_\Omega} \mu_i a(\varphi_i, \varphi_j) = l(\varphi_j), \quad \forall j=1, N_\Omega \right.$$

Forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} a(\varphi_1, \varphi_1) & a(\varphi_2, \varphi_1) & \dots & a(\varphi_{N_\Omega}, \varphi_1) \\ a(\varphi_1, \varphi_2) & a(\varphi_2, \varphi_2) & \dots & a(\varphi_{N_\Omega}, \varphi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\varphi_1, \varphi_{N_\Omega}) & a(\varphi_2, \varphi_{N_\Omega}) & \dots & a(\varphi_{N_\Omega}, \varphi_{N_\Omega}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_{N_\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l(\varphi_1) \\ l(\varphi_2) \\ \vdots \\ l(\varphi_{N_\Omega}) \end{bmatrix}$$

$$A \mu = b$$

$$A_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$$

(9)

Application en 1-D:

Ex: $V_h \subset H_0^1(a, b)$ tq:
 $V_h = \{ v_h \in C^0(a, b) \mid v_h \text{ est linéaire sur chaque segment } [x_j, x_{j+1}] \text{ et } v_h(a) = v_h(b) = 0 \}$

$$A_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b (\varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + c(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x)) dx$$

$$= \sum_{k=0}^N \int_{x_k}^{x_{k+1}} (\varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + c(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x)) dx$$

$$a(\varphi_i, \varphi_j) = 0 \quad \text{si } |i-j| \geq 2$$

$$a(\varphi_i, \varphi_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\varphi_i'(x) \varphi_{i-1}'(x) + c(x) \varphi_i(x) \varphi_{i-1}(x)) dx$$

$$a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\varphi_i'(x) \varphi_{i+1}'(x) + c(x) \varphi_i(x) \varphi_{i+1}(x)) dx$$

$$a(\varphi_i, \varphi_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (\varphi_i'^2(x) + c(x) \varphi_i^2(x)) dx$$

Éléments finis de Lagrange en 1-D:

Exemple précédent avec: $c(x) = 0$ et $[a, b] = [0, 1]$

Alors $A_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$

$$= \int_0^1 \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) dx = \sum_{k=0}^N \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) dx$$

$$b_i = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx = \sum_{k=0}^N \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \varphi_i(x) dx$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \varphi_i(x) dx$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\varphi_i'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_{i-1}} & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ -\frac{1}{x_i - x_{i+1}} & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$A_{i,i} = a(\varphi_i, \varphi_i) = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} - \frac{1}{x_i - x_{i+1}}$$

$$A_{i,i-1} = a(\varphi_i, \varphi_{i-1}) = \frac{1}{x_i - x_{i+1}}$$

$$A_{i-1,i} = a(\varphi_{i-1}, \varphi_i) = \frac{1}{x_{i-1} - x_i}$$

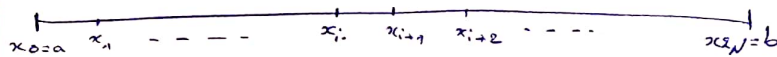
$$b_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2} f_i$$

Les éléments finis de Lagrange de degré 2

* On fait une discrétisation de $[a, b]$ en N sous-intervalles.

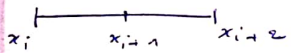
* V_h l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$ polynomiale de degré 2 sur chaque sous-intervalle (un polynôme de degré 2 est définie par ses valeurs en 3 points)

* Globalement une discrétisation par $2N+1$ points x_i pour $i = 0, 2N$



$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 2N \quad (2N+1 \text{ pts})$$

* Interpolation de Lagrange de degré 2 sur $[x_i, x_{i+2}]$



$$\varphi_i(x) \simeq P_2(x) = \sum_j L_j(x) f(x_j) = \varphi_i(x_i)$$

$$L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$\varphi_i(x) \simeq L_i(x) \cdot \varphi_i(x_i) + L_{i+1}(x) \varphi_i(x_{i+1}) + L_{i+2}(x) \varphi_i(x_{i+2})$$

$$\simeq L_i(x) \cdot \varphi_i(x_i) \stackrel{(*)}{=} L_i(x)$$

$$= \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \right) \left(\frac{x - x_{i+2}}{x_i - x_{i+2}} \right)$$

$$\varphi_{i+1}(x) = \frac{(x - x_i)(x - x_{i+2})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2})}$$

$$\varphi_{i+2}(x) = \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i+2} - x_i)(x_{i+2} - x_{i+1})}$$

Technique de l'élément de référence: $x \in [x_i, x_{i+2}]$

changement de variable:

$$x(t) = x = x_{i+1} + \frac{x_{i+2} - x_i}{2} t \quad t \in [-1, 1]$$

il vient:

$$\varphi_i(x(t)) = \varphi_{-1}(t) = \frac{t(t-1)}{2} \Rightarrow \varphi'_{-1}(t) = t - \frac{1}{2}$$

$$\varphi_{i+1}(x(t)) = \varphi_0(t) = -(t-1)(t+1) \Rightarrow \varphi'_0(t) = -2t$$

$$\varphi_{i+2}(x(t)) = \varphi_1(t) = \frac{t(t+1)}{2} \Rightarrow \varphi'_1(t) = t + \frac{1}{2}$$