أجوبة امتحان الدورة العادية 2008

التمرين الأول :

1

لدينا : الفلكة $(\mathcal{S})$ معرفة بالمعادلة التالية :

$$(\mathcal{S}) : x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0$$

إذن : $(\mathcal{S}) : (x^2-2x)+(y^2)+(z^2-4z)+2=0$

يعني : $(\mathcal{S}) : (x-1)^2+y^2+(z-2)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$

إذن : $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها $\Omega(1,0,2)$ و شعاعها $\sqrt{3}$.

2

لدينا : $\begin{cases} O(0,0,0) \\ A(0,-1,1) \\ B(1,-1,0) \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \overrightarrow{OA}(0,-1,1) \\ \overrightarrow{OB}(1,-1,0) \end{cases}$

و منه :

$$\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=1\vec{i}-(-1)\vec{j}+1\vec{k}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$$

إذن : $(1,1,1)$ هو مثلوث احداثيات المتجهة $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OB}$.

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوى (OAB) .

بما أن المتجهة $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$ منظمية على المستوى (OAB) .

فإن $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$ متعامدتان . أي : $\overrightarrow{OM}\cdot\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right)=0$.

يعني : $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0$ إذن : $x+y+z=0$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن معادلة ديكارتية للمستوى (OAB) .

2

لدينا : $(OAB) : x+y+z=0$

و لدينا كذلك $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها $\Omega(1,0,2)$ و شعاعها $\sqrt{3}$.

$$d(\Omega,(OAB))=\frac{|1+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

إذن : المستوى (OAB) مماس للفلكة $(\mathcal{S})$ في نقطة واحدة .

لدينا : $\boxed{A\epsilon(OAB)}$ (1)

و لدينا أيضا : $(\mathcal{S}) : x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0$

نلاحظ أن : $0^2+(-1)^2+1^2-2(0)-4(1)+2=0$

إذن : $\boxed{A\epsilon(\mathcal{S})}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن A هي نقطة تماس (OAB) و الفلكة $(\mathcal{S})$.

التمرين الثاني :

1

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^2-6z+34=0$

لدينا : $\Delta=(-6)^2-4(34)=36-136=-100=(10i)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 :

$$z_1=\frac{6-10i}{2}=3-5i \quad \text{و} \quad z_2=\frac{6+10i}{2}=3+5i$$

2 أ

لدينا : $aff(\vec{u})=4-2i$ و الإزاحة T معرفة بما يلي :

$$\begin{array}{rccc} T_{\vec{u}} : & (\mathcal{P}) & \longmapsto & (\mathcal{P}) \\ & M(z) & \longmapsto & M'(z') \end{array}$$

لدينا : $T_{\vec{u}}(M)=M'$

إذن : حسب التعريف المتجهي للإزاحة نكتب : $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

و منه : $aff\left(\overrightarrow{MM'}\right)=aff(\vec{u})$ يعني : $z'-z=4-2i$

أي : $z'=z+4-2i$

و بالتالي : الإزاحة T معرفة بما يلي :

$$\begin{array}{rccc} T_{\vec{u}} : & (\mathcal{P}) & \longmapsto & (\mathcal{P}) \\ & M(z) & \longmapsto & M'(z+4-2i) \quad (*) \end{array}$$

لدينا :

$$aff(A)+4-2i=(3+5i)+4-2i$$
$$=7+3i=aff(C)$$

إذن نستنتج أن : $aff(C)=aff(A)+4-2i$

و منه حسب الكتابة العقدية $(*)$ نستنتج أن : $T_{\vec{u}}(A)=C$

2 ب

لدينا : $\begin{cases} aff(A)=a=3+5i \\ aff(B)=b=3-5i \\ aff(C)=c=7+3i \end{cases}$

إذن :

$$\frac{b-c}{a-c}=\frac{(3-5i)-(7+3i)}{(3+5i)-(7+3i)}=\frac{-4-8i}{-4+2i}$$

$$=\frac{-(4+8i)(2i+4)}{(2i-4)(2i+4)}=\frac{-(16-16+40i)}{(2i)^2-4^2}$$

$$=\frac{-40i}{-20}=2i$$

و بالتالي : $\frac{b-c}{a-c}=2i$

2 ج

لدينا حسب ما سبق : $\frac{b-c}{a-c}=2i$

إذن :

$$\begin{cases} \left|\frac{b-c}{a-c}\right|=|2i| \\ \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)\equiv\arg(2i)\ [2\pi] \end{cases}$$

إذن :

$$\begin{cases} \frac{|b-c|}{|a-c|}=2 \\ \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$$

يعني :

$$\begin{cases} |b-c|=2|a-c| \\ \left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$$

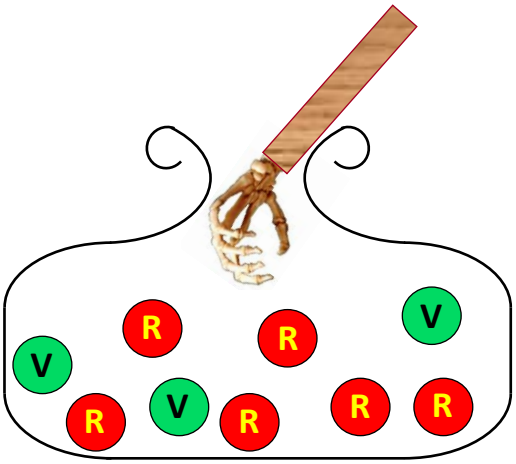
يعني :

$$\begin{cases} BC=2AC \\ A\hat{C}B=90° \end{cases}$$

و بالتالي : ABC قائم الزاوية في النقطة C و $BC=2\,AC$.

www.baclive.blogspot.com

التمرين الثالث :



عندما نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من كيس يحتوي على 9 كرات فإن هذه التجربة العشوائية تحتمل C_9^3 نتيجة ممكنة .

يعني : $card(\Omega) = C_9^3 = 84$ بحيث Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

1 أ

$$p\left(\begin{array}{c}\text{كرتين}\\ \text{حمراوين و}\\ \text{كرة خضراء}\end{array}\right) = \frac{card\left(\begin{array}{c}\text{كرتين}\\ \text{حمراوين و}\\ \text{كرة خضراء}\end{array}\right)}{card(\Omega)} = \frac{C_6^2 \times C_3^1}{84}$$

$$= \frac{15 \times 3}{84} = \frac{45}{84} = \frac{15}{28}$$

1 ب

للإجابة على هذا السؤال أقترح طريقتين :

الطريقة الأولى :

$$p\left(\begin{array}{c}\text{كرة}\\ \text{خضراء}\\ \text{على الأقل}\end{array}\right) = p\left(\begin{array}{c}\text{كرة خضراء}\\ \text{و كرتين}\\ \text{حمراوين}\end{array} \text{ أو } \begin{array}{c}\text{كرتان}\\ \text{خضراوان و}\\ \text{كرة حمراء}\end{array} \text{ أو } \begin{array}{c}\text{ثلاث}\\ \text{كرات}\\ \text{خضراء}\end{array}\right)$$

$$= p\left(\begin{array}{c}\text{كرة خضراء}\\ \text{و كرتين}\\ \text{حمراوين}\end{array}\right) + p\left(\begin{array}{c}\text{كرتان}\\ \text{خضراوان و}\\ \text{كرة حمراء}\end{array}\right) + p\left(\begin{array}{c}\text{ثلاث}\\ \text{كرات}\\ \text{خضراء}\end{array}\right)$$

$$= \frac{card\left(\begin{array}{c}\text{كرة خضراء}\\ \text{و كرتين}\\ \text{حمراوين}\end{array}\right)}{card(\Omega)} + \frac{card\left(\begin{array}{c}\text{كرتان}\\ \text{خضراوان و}\\ \text{كرة حمراء}\end{array}\right)}{card(\Omega)} + \frac{card\left(\begin{array}{c}\text{ثلاث}\\ \text{كرات}\\ \text{خضراء}\end{array}\right)}{card(\Omega)}$$

$$= \frac{C_3^1 \times C_6^2}{84} + \frac{C_3^2 \times C_3^1}{84} + \frac{C_3^3}{84}$$

$$= \frac{3 \times 15}{84} + \frac{3 \times 6}{84} + \frac{1}{84} = \frac{16}{21}$$

الطريقة الثانية : إستعمال تقنية الحدث المضاد .

لدينا : $\overline{\left(\begin{array}{c}\text{الحصول على}\\ \text{كرة خضراء}\\ \text{واحدة على الأقل}\end{array}\right)} = \left(\begin{array}{c}\text{الحصول على}\\ \text{ثلاث كرات كلها}\\ \text{حمراء}\end{array}\right)$

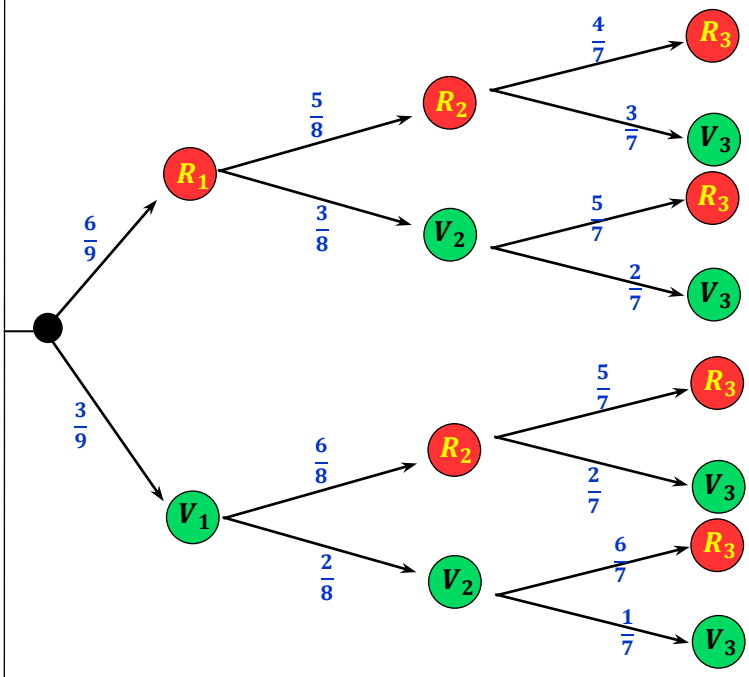
إذن : $p\left(\begin{array}{c}\text{الحصول على}\\ \text{كرة خضراء}\\ \text{واحدة على الأقل}\end{array}\right) = 1 - p\left(\begin{array}{c}\text{الحصول على}\\ \text{ثلاث كرات كلها}\\ \text{حمراء}\end{array}\right)$

$$= 1 - \frac{card\left(\begin{array}{c}\text{الحصول على}\\ \text{ثلاث كرات كلها}\\ \text{حمراء}\end{array}\right)}{card(\Omega)}$$

$$= 1 - \frac{C_6^3}{84} = 1 - \frac{20}{84} = \frac{64}{84} = \frac{16}{21}$$

1 ج

عندما نسحب عشوائيا بالتتابع و بدون إحلال ثلاث كرات من الصندوق فإن هذه التجربة العشوائية تصبح ثلاث سحبات متتابعة و مبينة في الشجرة التالية :



من خلال هذه الشجرة المباركة يمكن حساب احتمال أي حدث كيفما كان .

$$p\left(\begin{array}{c}\text{ثلاث}\\ \text{كرات}\\ \text{حمراء}\end{array}\right) = p\left(\begin{array}{c}\text{كرة حمراء}\\ \text{في السحبة}\\ \text{الأولى}\end{array} \text{ و } \begin{array}{c}\text{كرة حمراء}\\ \text{في السحبة}\\ \text{الثانية}\end{array} \text{ و } \begin{array}{c}\text{كرة حمراء}\\ \text{في السحبة}\\ \text{الثالثة}\end{array}\right)$$

$$= p(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = p(R_1) \times p(R_2) \times p(R_3)$$

$$= \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{120}{504} = \frac{5}{21}$$

إضافة : أضيف على سبيل الاستئناس الاحتمالات التالية :

$$p\left(\begin{array}{c}\text{ثلاث}\\ \text{كرات}\\ \text{خضراء}\end{array}\right) = \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{1}{84}$$

www.baclive.blogspot.com

$$p\begin{pmatrix}\text{كرتين}\\ \text{خضراوين}\\ \text{على الأقل}\end{pmatrix} = \left(\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\right)+\left(\frac{3}{9}\times\frac{6}{8}\times\frac{2}{7}\right)+\left(\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{6}{7}\right)+$$
$$+\left(\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{1}{7}\right)$$
$$=\frac{1}{14}+\frac{1}{14}+\frac{1}{14}+\frac{1}{84}=\frac{19}{84}$$

و هذا يعني أننا نستطيع حساب احتمال أي حدث وارد في الشجرة بتتبع مساره فقط داخل الشجرة . انتهت الإضافة . و الزيادة من رأس **العاقل** ؟.

التمرين الرابع :

I 1 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$. لدينا : $g(x)=x-2\ln x$.

إذن : $g'(x)=(x-2\ln x)'=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}$

إذن : $(\forall x>0)\ ;\ g'(x)=\frac{x-2}{x}$

I 1 ب

ليكن x عنصرا من المجال $]0;2]$. يعني : $0<x\le 2$

يعني : $-2<x-2\le 0$ و منه : $\frac{x-2}{x}\le 0\ ;\ \forall x\in]0,2]$

يعني : $\forall x\in]0;2]\ ;\ g'(x)\le 0$

و هذا يعني أن الدالة g تناقصية على المجال $]0;2]$.

ليكن x عنصرا من المجال $[2;+\infty[$.

إذن : $x\ge 2$ و منه : $x-2\ge 0$

يعني : $(\forall x\ge 2)\ ;\ \frac{x-2}{x}\ge 0$

يعني : $(\forall x\ge 2)\ ;\ g'(x)\ge 0$

يعني أن الدالة g تزايدية على المجال $[2;+\infty[$.

I 2

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

هذا يعني أن : $x\in]0;2]$ أو $x\in[2;+\infty[$.

الحالة الأولى : $x\in]0;2]$.

لدينا : $x\le 2$

و بما أن g تناقصية على $]0;2]$ فإن : $g(x)\ge g(2)$.

و لدينا : $g(2)=2-2\ln 2\approx 0{,}6>0$

إذن : $\forall x\in]0;2]\ ;\ g(x)\ge g(2)>0$

يعني : $\boxed{\forall x\in]0;2]\ ;\ g(x)>0}$ (1)

الحالة الثانية : $x\in[2;+\infty[$.

لدينا : $x\ge 2$.

بما أن : g تزايدية على $[2;+\infty[$ فإن : $g(x)\ge g(2)$

و لدينا : $g(2)\approx 0{,}6>0$

إذن : $\forall x\in[2;+\infty[\ ;\ g(x)\ge g(2)>0$

يعني : $\boxed{\forall x\in[2;+\infty[\ ;\ g(x)>0}$ (2)

نلاحظ أنه في كلتا الحالتين لدينا : $g(x)>0$.

إذن : من (1) و (2) نستنتج أن : $\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ g(x)>0$.

II 1

لدينا : $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x-(\ln x)^2)$

$$=0-(\ln 0^+)^2=0-(-\infty)^2=0-(+\infty)=-\infty$$

إذن : $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

إذن محور الأراتيب مقارب عمودي للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار الصفر على اليمين .

II 2 أ

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)\cdot\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)=4\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$$
$$=4\lim_{\substack{t\to+\infty\\ t=\sqrt{x}}}\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2=4\times 0^2=0$$

إذن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$

II 2 ب

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-(\ln x)^2)$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\underbrace{\frac{(\ln x)^2}{x}}\right)=(+\infty)(1-0)=+\infty$$

إذن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

و لدينا كذلك : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-(\ln x)^2}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\underbrace{\frac{(\ln x)^2}{x}}\right)=(1-0)=1$$

إذن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

II 2 ج

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}(x-(\ln x)^2-x)$

$$=\lim_{x\to+\infty}-(\ln x)^2=-(+\infty)^2=-\infty$$

إذن : $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-\infty$

حصلنا لحد الآن على النهايات التالية :
$$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1\\ \lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-\infty\end{cases}$$

و هذه النهايات تُمكننا من أن نقول أن $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم ذو المعادلة $y=x$ بجوار $+\infty$.

www.baclive.blogspot.com

II 2 د

لدينا : $\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ f(x) - x = -(\ln x)^2$

نعلم أن مربع أي عدد حقيقي يكون دائما موجبا .

يعني : $\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ (\ln x)^2 \geq 0$

يعني : $\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ -(\ln x)^2 \leq 0$

يعني : $\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ f(x) - x \leq 0$

يعني : $\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ f(x) \leq x$

إذن $(\mathscr{C})$ يوجد فوق المستقيم (Δ) على المجال $]0;+\infty[$.

II 3 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

لدينا : $f(x) = x - (\ln x)^2$.

إذن : $f'(x) = 1 - 2(\ln x)(\ln x)'$

$$= 1 - \frac{2\ln x}{x} = \frac{x - 2\ln x}{x} = \frac{g(x)}{x}$$

إذن : $\forall x \in]0,+\infty[\ ; \ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$

لدينا : حسب السؤال I) 2) : $\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ g(x) > 0$

إذن : $\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ \dfrac{g(x)}{x} > 0$

و منه : $\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ f'(x) > 0$

و هذا يعني أن f دالة تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.

II 3 ب

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

II 3 ج

نعلم أن المعادلة الديكارتية للمماس (T) للمنحنى في النقطة التي أفصولها x_0 تكتب بصفة عامة على الشكل التالي :

$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

إذن : $(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

و لدينا : $f(1) = 1 - (\ln 1)^2 = 1$

و كذلك : $f'(1) = \dfrac{g(1)}{1} = \dfrac{1 - 2\ln 1}{1} = 1$

إذن : $(T) : y = 1(x-1) + 1$

يعني : $(T) : y = x$

II 4

من خلال جدول تغيرات الدالة f ، نلاحظ أن f دالة تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$ و معرفة بما يلي : $f \ : \ ]0,+\infty[\ \longmapsto \ \mathbb{R}$

إذن f تقابل من المجال $]0;+\infty[$ نحو $\mathbb{R}$.

و بما أن 0 عنصر من $\mathbb{R}$ فإنه يمتلك سابقا واحدا α من المجال $]0;+\infty[$.

يعني : $\exists! \ \alpha \in]0;+\infty[\ ; \ f(\alpha) = 0$

يعني أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$.

لدينا :
$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - 1 \approx -0{,}6 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \left(\ln\frac{1}{2}\right)^2 \approx 0{,}02 \end{cases}$$

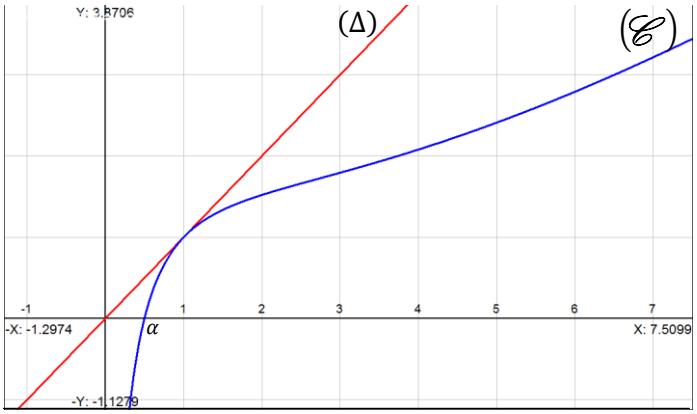
نلاحظ أن : $-0{,}6 < 0 < 0{,}02$ يعني : $f\left(\frac{1}{e}\right) < 0 < f\left(\frac{1}{2}\right)$

بإدخال الدالة العكسية f^{-1} نحصل على :

$$f^{-1}\left(f\left(\frac{1}{e}\right)\right) < f^{-1}(0) < f^{-1}\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

يعني : $\dfrac{1}{e} < \alpha < \dfrac{1}{2}$

II 5



II 6 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$. لدينا : $H(x) = x\ln x - x$

إذن : $H'(x) = (x\ln x - x)' = \ln x + 1 - 1 = \ln x = h(x)$

إذن الدالة H دالة أصلية للدالة h على المجال $]0;+\infty[$.

و لدينا :
$$\int_1^e \ln x \, dx = \int_1^e h(x)\, dx = [H(x)]_1^e$$
$$= H(e) - H(1) = (e\ln e - e) - (1\ln 1 - 1) = 1$$

II 6 ب

$$\int_1^e (\ln x)^2 \, dx = \int_1^e \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{(\ln x)^2}_{v} \, dx = [uv]_1^e - \int uv' \, dx$$
$$= [x(\ln x)^2]_1^e - 2\int_1^e \frac{x\ln x}{x} dx$$
$$= e - 2\int_1^e \ln x \, dx = e - 2$$

III 6 ج

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (Δ) و المستقيمين $x = 1$ و $x = e$.

بما أن التكامل يقيس عادة مسافة أو مساحة أو حجم .

www.baclive.blogspot.com

فإن : $\mathcal{A} = \int_1^e |f(x) - x|\, dx$ ——— $(*)$

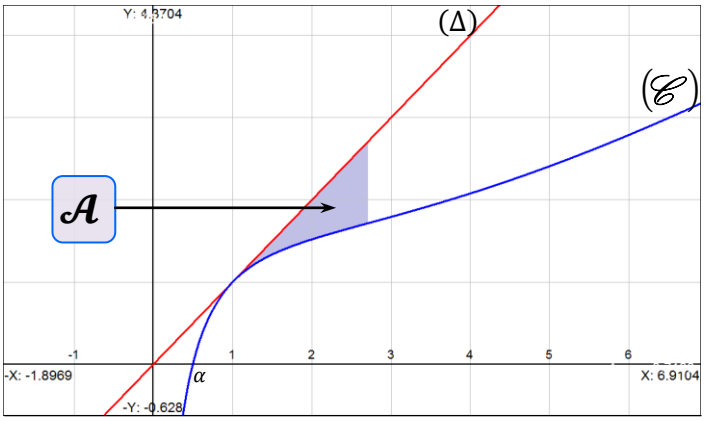
لدينا حسب السؤال II 2) د) : $\boxed{\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ f(x) - x \leq 0}$

إذن : $\forall x \in [1;e] \ ; \ f(x) - x \leq 0$

و منه : $\forall x \in [1;e] \ ; \ |f(x) - x| = x - f(x)$

و بالتالي : $\mathcal{A} = \int_1^e |f(x) - x|\, dx = \int_1^e (x - f(x))\, dx$

$= \int_1^e (x - x + (\ln x)^2)\, dx = \int_1^e (\ln x)^2\, dx = e - 2$



و كإضافة على هذا الجواب ، يُطلَب منا في بعض الأحيان حساب هذه المساحة بالسنتمتر مربع (cm^2) . و من أجل ذلك نبحث عن وحدة المعلم .

نفترض أن : $l'unité = \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3\ cm$

إذن : $\mathcal{A} = (e-2)(l'unité)^2$ ———

$= (e-2)(3\ cm)^2 = 9(e-2)\ cm^2$

و في حالة ما لم يُطلب منك ذلك فلا داعي لهذا كله .

أو كما يقول المثل الياباني : الزيادة من رأس الأحمق .

III 1

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(P_n) : (\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ 1 \leq u_n \leq 2$

لدينا : $1 \leq 2 \leq 2$ يعني : $1 \leq u_0 \leq 2$

إذن العبارة (P_0) صحيحة

نفترض أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ 1 \leq u_n \leq 2$

نعلم حسب السؤال II 3) أ) أن الدالة f تزايدية على المجال $]0;+\infty[$.

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)$

و لدينا : $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 2 - (\ln 2)^2 \approx 1{,}5 \end{cases}$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ 1 \leq f(u_n) \leq 1{,}5 < 2$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ 1 \leq f(u_n) \leq 2$

و منه : $(P_n) : (\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ 1 \leq u_{n+1} \leq 2$

إذن العبارة (P_{n+1}) صحيحة

و بالتالي حسب مبدأ الترجع : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ 1 \leq u_n \leq 2$

III 2

لدينا حسب السؤال II 2) د) : $\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ f(x) - x \leq 0$

لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ 1 \leq u_n \leq 2$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_n \in [1;2] \subset]0;+\infty[$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_n \in]0;+\infty[$

إذن : نستطيع تطبيق النتيجة $(*)$ من أجل $x = u_n$.

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ f(u_n) - u_n \leq 0$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ f(u_n) \leq u_n$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1} \leq u_n$

و منه : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية تناقصية .

III 3

لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ 1 \leq u_n \leq 2$

إذن : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية مصغورة بالعدد 1 .

و بما أنها تناقصية فهي متقاربة .

أو بتعبير آخر : $\begin{cases} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ مصغورة} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ تناقصية} \end{cases} \Longrightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة

و نهايتها ℓ تحقق : $f(\ell) = \ell$

يعني : $\ell - (\ln \ell)^2 = \ell$ يعني : $-(\ln \ell)^2 = 0$

يعني : $\ln \ell = 0$ أي : $\ell = 1$

www.baclive.blogspot.com